Université Mohamed V de Rabat
Faculté des Sciences de l'Education

ATTADRISS

Revue spécialisée à comité de lecture de la Faculté des Sciénces de l'Education

N°8 -Nouvelle série- Décembre 2016

Prix : 40 DH

Quelques exemples d'obstacles pour la construction du savoir en mathématiques

Mohamed OUDRHIRI

Faculté des sciences de l'éducation Rabat

RÉSUMÉ

Les travaux de recherche en didactique des mathématiques ont clairement montré que certaines réponses données par des élèves à des problèmes pouvaient être éloignées des modèles canoniques correspondants. Souvent ce sont les conceptions et modes de raisonnement liés au « sens commun » qui se révèlent bien plus enracinés que ceux produits par un enseignement mathématique, même s'il est de longue durée. Le but de cet article sur les obstacles en mathématiques est de relever des exemples d'erreurs récurrentes en algèbre et géométrie, montrer qu'elles se regroupent autour de conceptions, ensuite les mettre en rapport avec des obstacles dans l'histoire des mathématiques.

Mots clés : erreur, conceptions, obstacles épistémologiques, obstacles didactiques, linéarité, nombres.

1. Introduction

« J'ai souvent été frappé du fait que les professeurs […] ne comprennent pas que les élèves ne comprennent pas ! »(Bachelard, 1996, Introduction). Qui peut prétendre, à l'encontre de Bachelard, enseignant ou élève, de n'avoir jamais vécu ce sentiment d'incompréhension à la sortie d'un cours de mathématiques? L'enseignant a du mal à comprendre pourquoi les élèves ne comprennent pas ou retombent dans leurs travers peu de temps après le cours, malgré tous ses efforts de démonstrations, d'exemples concrets, etc.

Cet étonnement s'atténue sous l'éclairage du constructivisme. Dans cette perspective où l'élève est censé construire son propre savoir au fur et à mesure des problèmes qu'il rencontre et doit résoudre, le rôle des connaissances préalables est important ; le « déjà-là conceptuel » (Astolfi, 1990). L'image de la page blanche ou de la cire sur laquelle s'imprime automatiquement un savoir-vérité qui serait intégré par l'apprenant ne fait plus recette (Giordan et De Vecchi, 2002). La nouvelle connaissance se construit souvent à partir de l'ancienne. C'est rarement une simple adjonction de connaissance. Souvent la nouvelle connaissance doit produire une restructuration de l'ancienne si elle veut être intégrée dans le grand édifice du savoir. Cependant l'ancienne connaissance n'est pas prête de se faire remettre en cause sans aucune résistance ; on construit toujours une nouvelle connaissance contre une ancienne, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle (Bachelard, 1996).

D'aucuns pensent pouvoir court-circuiter le problème en demandant aux élèves d'oublier ce qu'ils ont appris avant, et qu'un exposé bien axiomatisé reprenant tout à la base pourrait y remédier. En fait les recherches montrent que cette méthode est loin de donner les résultats escomptés (Giordan et De Vecchi, 1987).

L'élève dispose toujours de modèles souvent implicites (Artigue et Robinet, 1982 ; Rogalski, 1982). Ces conceptions constituent souvent des obstacles mais sont en même temps nécessaires pour que l'élève puisse construire son savoir (Giordan, 1996).Ces modèles, même quand ils sont erronés ou mal adaptés sont les premières pierres à partir desquelles l'édifice du savoir sera construit (Delevay, 1992). Edifice provisoire qui fera obstacle peut-être plus tard a d'autres savoirs. Mais à partir de là, il faudra à nouveau opérer une transformation pour aller plus loin.

2. Cadre théorique

La didactique des mathématiques se caractérise une centration sur les contenus de l'enseignement mathématique, ce qui n'exclut pas son intérêt pour les aspects psychologiques et méthodologiques. Ce qui la fonde plutôt, c'est la prise de conscience qu'existent des difficultés d'appropriation qui sont intrinsèques aux savoirs, difficultés qu'il faut diagnostiquer et analyser avec une grande précision pour permettre aux élèves de les dépasser. Les recherches endidactique des mathématiques mettent en évidence de nombreux obstacles, qui ne sont pas évidents à relever et diagnostiquer par les enseignants. Elles aident ainsi à mieux comprendre certaines lenteurs ou échecs, qu'on est tenté d'attribuer à des caractéristiques personnelles des élèves, comme leur manque d'effort ou de motivation. On s'empêche alors d'y voir des problèmes « cachés dans les savoirs eux-mêmes », quand ce ne sont pas des difficultés involontairement induites par les habitudes et les traditions d'enseignement.

C'est Bachelard qui a introduit le concept d'« obstacle » dans l'expression « obstacle épistémologique », et lui-même avait souligné que le mot n'est pas très adapté, mais qu'il le choisit à défaut d'un autre meilleur

(Bachelard 1996). En effet, il ne s'agit pas de détruire, le plus souvent d'expliciter, puis de transformer et d'enrichir le modèle implicite ou la représentation. Il pensait que cette notion d'obstacle épistémologique était réservée aux sciences expérimentales, avant que sa transposition en mathématiques ne fûtrendue possible grâce aux travaux de Brousseau sur la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998).

Brousseau a remis en cause le statut de l'erreur : « L'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié qu'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement le reflet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes et béhavioristes de l'apprentissage ; mais l'effet d'une connaissance antérieure qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fausse ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas imprévisibles, elles sont constituées en obstacles [...] Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens même de la connaissance acquise » (cité dans Artigue, 1990, p. 249). Donc les erreurs des élèves ne sont pas causées par des dysfonctionnements ou des manques de connaissances. Elles ne se retrouvent pas non plus par hasard. Très souvent, elles sont reproductibles (on les retrouve quelle que soit la classe fréquentée) et persistantes (les tentatives de remédiation ne parviennent pas à les éradiquer). Il a aussi distingué entre les obstacles ontogénétiques résultants strictement du développement psychogénétique, les obstacles épistémologiques qui sont constitutifs de la connaissance visée et dont l'existence est souvent attestée dans le processus historique de production des connaissances et les obstacles didactiques qui sont le résultat artificiel de décisions didactiques malencontreuses (Brousseau, 1983)

Duroux (1982) propose une liste de conditions nécessaires pour adapter le concept d'obstacle en mathématiques :

1. Un obstacle est une connaissance, pas une difficulté ou un manque de connaissance
2. Cette connaissance permet des réponses adaptées dans certains contextes
3. Mais elle produit des réponses erronées hors de ce contexte
4. Cette connaissance se maintient malgré les contradictions et les contre-exemples, et l'établissement d'une connaissance meilleure
5. Elle persiste même après la prise de conscience de son inexactitude.

De nombreux travaux : Glaeser (1981) sur les nombres négatifs, Berthelot (1983) sur la notion de limite, Sierpinska (1985) sur la continuité des fonctions, etc. ont montré l'existence des obstacles en mathématiques en les répertoriant et en examinant leurs rapports et leurs causes.

3. Méthode d'investigation

Dans le but de mettre en évidence le problème qui sous-tend notre recherche et pour étudier certaines erreurs significatives sur quelques notions de bases (développement et simplification d'expressions algébriques, reconnaissance de figures géométriques à partir de leurs spécificités), c'est-à-dire qui relèvent de connaissances en acte, pouvant permettre des réponses correctes dans certains contextes, reproductibles, non isolées et formant avec d'autres erreurs une sorte de système d'erreurs, nous avons opté pour une analyse de copies rédigées en réponse à une série d'exercices portant sur ces notions. Il s'agit d'exercices classiques, largement travaillés en classe.

Le test a été conduit dans une situation de devoir surveillé en temps limité (les notes du test sont prises en compte dans la moyenne finale des élèves) auprès de85 élèves de 3ème année du collège, issus de 3 classes différentes d'un collège de Casablanca. Les élèves ont déjà suivi des cours et des travaux dirigés en rapport avec ces notions. La moyenne générale de tous ces élèves est de 12. La meilleure moyenne est 19, la moins élevée est 5. Le dépouillement nous permettra d'avoir une idée plus précise sur les erreurs et de repérer les conceptions qui peuvent être à l'œuvre et vérifier si ces dernières ne relèvent pas d'obstacles.

Nous sommes conscients des limites de notre méthodologie, puisque nous nous livrons par l'analyse de productions écrites à une reconstitution des conceptions des élèves, avec toute la part de subjectivité que cela peut comporter ou d'approximation en fonction des données recueillies, du contrat didactique, etc.

4. Résultats

4.1. Obstacle dû à la « linéarité »

A. Test

Développer et simplifier :

1. $(x + 3)^2$, 2. $(x + 4)^3$, 3. $(x + y + 3)^2$

B. Dépouillement

Exercice	1	2	3
% réussite	75	55	40
M/M1	20	30/10	40/10

Après le dépouillement, nous avons regroupé les réponses comme suit :

M : 1.$(x + 3)^2 = x^2 + 3^2$, 2.$(x + 4)^3 = x^3 + 4^3$, 3.$(x + y + 3)^2 = x^2 + y^2 + 3^2$

M1 : 2. $(x + 4)^3 = x^3 + 12x + 4^3$, 3. $(x + y + 3)^2 = x^2 + y^2 + 3^2 + 6xy$

C. Analyse des productions des élèves

Nous pouvons voir grâce au dépouillement qu'au moins 75% des élèves connaissent la première identité remarquable (résultats de l'exercice 1). L'erreur la plus fréquente (20%) est $(x + 3)^2 = x^2 + 3^2$.

Pour le deuxième exercice, 4 élèves qui ont répondu correctement à l'exercice 1 ont utilisé la méthode M. 8 élèves ont utilisé la méthode M1, ils ont transposé, de manière erronée, l'identité remarquable à la puissance 2 pour la puissance 3.

Pour le troisième exercice, les 8, mêmes élèves, ont essayé une transposition équivalente pour l'exercice 3, à partir de l'identité remarquable à la puissance 2. Mais la méthode la plus utilisée est la méthode M. 16 élèves qui ont répondu correctement à l'exercice 1 ont utilisé la méthode M (peut-être que l'enchaînement des exercices du test y est pour quelque chose).

Nous remarquons que plus l'exercice comporte de difficultés supplémentaires ou moins travaillé en classe, plus les élèves ont recours au modèle linéaire (25% pour l'exercice 1, 35% pour le 2 et 40% pour le 3).

On voit bien que les erreurs (20%pour l'exercice 1,30% pour l'exercice 2 et 40% pour l'exercice3) relèvent du modèle de la linéarité appliquée à des fonctions qui ne sont pas linéaires. L'erreur $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ assez récurrente au collège vient de l'application erronée de la distributivité, comme dans 3 $(a + b) = 3a + 3b$, mais cette distributivité est la linéarité de la fonction f telle que $f(x) = 3x$. Cette erreur est d'autant plus répandue qu'on exige des élèves de retenir au plus vite le résultat, sans leur donner le loisir de le retrouver eux-mêmes aussi longtemps que nécessaire.

Certains des élèves qui connaissent bien la formule $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et qui ont répondu correctement à l'exercice 1, ont utilisé la méthode M pour les exercices 2 et 3. Devant $(a + b)^3$, ils répondent $a^3 + b^3$et non $a^3 + b^3 + 3ab$ et pour$(a + b + c)^2$, ils répondent $a^2 + b^2 + c^2$et non $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc$ qui seraient la transposition formelle de la formule apprise, donc en utilisant le modèle linéaire. Pour d'autres, ils s'embarquent dans des développements fastidieux. Personne n'a pensé à appliquer, pour l'exercice 3, la formule qu'ils connaissent en remplaçant a para + b et b par c.

En mathématiques, le modèle linéaire est à l'origine d'erreurs de façon implicite dans d'autres situations (Bagni, 2000). Les erreurs suivantes peuvent s'expliquer de cette façon :

$\sqrt{a^2+b^2} = a + b$ ou $\sin(a + b) = \sin a + \sin b$

$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ou $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$

Ces erreurs ne sont pas dues à un manque de connaissance, mais plutôt à une connaissance qui, de plus, produit des réponses correctes dans un certain contexte fréquemment ou précédemment rencontré (quand la fonction est linéaire). Maiselle engendre des réponses fausses hors de ce contexte. Ce modèle est assez résistant aux contradictions auxquelles il est confronté ; en témoigne les différentes activités proposées au programme. Donc même après la prise de conscience que le modèle de la linéarité n'est pas généralisée, il continue de se manifester de façon résistante et opiniâtre quand il s'agit de nouveaux exercices jamais traités auparavant.

Autre remarque concernant la présentation des identités remarquables. Autrefois, quand la visualisation géométrique par les aires avait une grande place, il y avait deux identités remarquables à retenir : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Car il était sous-entendu que a et b étaient tous ls deux positifs pour représenter les longueurs.On a conservé dans notre enseignement, sans raison, ces deux formules, que le professeur fait apprendre aux élèves, alors qu'une seule suffit quand on sait que a et b représentent des nombres quelconques positifs ou négatifs. En revanche, il n'est pas interdit, dans le cas où ils sont positifs, de montrer l'illustration géométrique. Cette survivance des deux formules, comme si a et b étaient nécessairement positifs, est dangereuse, surtout si elle n'est pas expliquée, car cela renforce pour les élèves un modèle implicite très fort et qui est responsable de nombreuses erreurs : b est nombre positif et –b est un nombre négatif.

4.2. Obstacle du à la connaissance des nombres

A. Test

Développer et simplifier

1. $(x + \frac{3}{2})^2$, 2. $(y + 0{,}3)^2$, 3. $(2{,}5x + \frac{4}{5})^2$

B. Dépouillement

Après le dépouillement, nous avons regroupé les réponses comme suit :

M : 1. $(x + \frac{3}{2})^2 = x^2 + (\frac{3}{2})^2$, 2. $(y + 0{,}3)^2 = y^2 + (0{,}3)^2$, 3. $(2{,}5x + \frac{4}{5})^2 = (2{,}5x)^2 + (\frac{4}{5})^2$

M1: Erreur due au calcul des fractions ou des décimaux pour les exercices 1, 2, .3

Exercice	1	2	3
% réussite	55	50	30
M/M1	20/20	20/25	30/30

C. Analyse des productions des élèves

Nous pouvons voir grâce au dépouillement que 20% pour l'exercice 1 et 2 et 30% pour l'exercice 3 des échecs sont dus à des erreurs de calcul avec les décimaux et les fractions. Par exemple, pour l'erreur $0{,}3^2 = 0{,}9$, nous supposons qu'ils font : $0 \times 0 = 0$ et $3 \times 3 = 9$ (Charnay et Mante, 1991). Cette méthode est d'autant plus tenace qu'elle marche pour certaines valeurs : $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$.

Les erreurs sur les décimaux sont dues au même modèle implicite chez les élèves : un décimal est vu comme un couple d'entiers. Dans la vie courante, quand on dit « il mesure 1m76 » ou bien « le prix est de 3DH50 » on croit manipuler des couples d'entiers, chacun des entiers exprimant une mesure avec des unités différentes : 1mètre et 76 centimètre ou 3 Dirhams et 50 centimes. Ce modèle implicite du couple d'entiers est renforcé par l'apprentissage, quand l'enseignant, pour expliquer les décimaux utilise les mesures : mètre, décimètres, etc. par exemple. L'obstacle qui était culturel devient un obstacle didactique par la méthode d'enseignement

Pour les fractions, on trouve des erreurs comme :

$(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{2}$ **(ils font l'erreur :** $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2}$).

Aussi 5 élèves ont laissé $\frac{4x}{1}$ dans l'exercice 3. Nous supposons qu'ils pensent qu'une fraction n'est pas un nombre ou une opération « à faire », car ils ne voient pas une division. Ce n'est qu'un simple signe qui s'ajoute ou se multiplie à ses semblables (les fractions) selon des règles.

Ceci rejoint dans une certaine mesure l'obstacle de la partition (voir plus loin 4.3). Alors qu'en mathématiques, le classement des nombres se fait par inclusions successives (tout entier est décimal, tout décimal est rationnel et tout rationnel est réel), certains élèves font la partition: entiers naturels / décimaux / rationnels / réels. Cette conception implicite des élèves, avec des ensembles disjoints de nombres est renforcée par le fait que les écritures des nombres ont des aspects différents : certains ont des virgules, d'autres des traits de fraction, d'autres des radicaux. Les opérations sont spécifiques pour chaque écriture. Quoi de commun entre 3,6 + 2,5 et $\frac{4}{7} + \frac{2}{3}$? Il existe des « règles » différentes pour chaque écriture, ce qui renforce la conception de la partition des nombres.

A chaque fois on représente aux élèves de nouveaux nombres (nombres décimaux, fractions, nombres négatifs, etc.), on n'explore qu'une portion des concepts en jeu. De plus suivant le niveau considéré, des formulations de complexité variable sont utilisées. Il n'est pas facile d'avoir à l'esprit une vue d'ensemble. Les élèves doivent modifier ou du moins enrichir leur conception du nombre, et la conception ancienne risque de faire obstacle à des degrés divers :

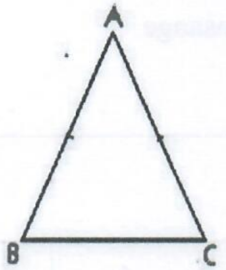
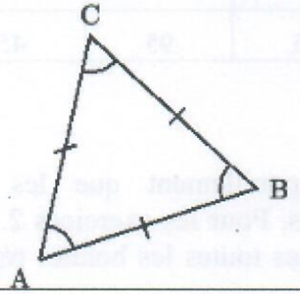
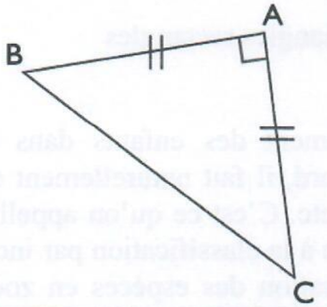
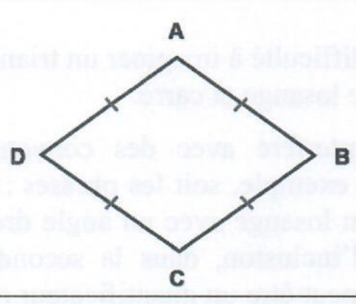
- Les entiers positifs : les nombres sont d'abord des cardinaux qui servent à compter des unités discrètes. Chaque nombre a alors son successeur.
  Les décimaux : la propriété que chaque nombre a un successeur disparaît. Les nombres servent désormais à mesure et non à compter.
- Les fractions: ces nombres apparaissent souvent en premier lieu comme des opérateurs, comme dans la phrase : « je prends les $\frac{3}{4}$ de quelque chose ». Dans cette conception, seules les fractions inférieures à 1 ont un sens. On comprend ce que signifie les $\frac{3}{4}$ d'un gâteau, pas les $\frac{7}{4}$ d'un gâteau.
- Les relatifs : les nombres relatifs, positifs et négatifs, ne sont pas vus comme des opérateurs en général et ne peuvent plus rien mesurer. Ce n'est pas en comparant la longueur de deux bâtons que l'élève arrivera à comprendre que -3 est inférieur à -2.

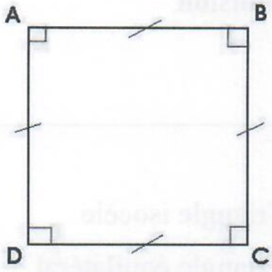
Tous ces changements dans la conception des nombres sont des obstacles à franchir. Certains gardent des conceptions pauvres qui constituent plus tard des obstacles sur les nombres. D'autant plus que l'émergence des décimaux dans l'histoire a été tardive (Bronner, 1997). Ils ont été introduits comme des êtres mathématiques par Stevin au XVI$^{\text{ème}}$ siècle. Il y avait pour leur introduction des obstacles épistémologiques, c'est-à-dire constitutifs de l'histoire de la pensée mathématique (Mankiewicz, 2001).

4.3. Obstacle pour la classification par inclusion

A. Test

Cochez la ou les bonnes réponses

	□ ABC Triangle isocèle □ ABC Triangle équilatéral □ ABC Triangle rectangle
	□ ABC Triangle isocèle □ ABC Triangle équilatéral □ ABC Triangle rectangle
	□ ABC Triangle isocèle □ ABC Triangle équilatéral □ ABC Triangle rectangle
	□ ABCD carré □ ABCD rectangle □ ABCD losange

	□ ABCD carré □ ABCD rectangle □ ABCD losange

B. Dépouillement

Exercice	1	2	3	4	5
% réussite	95	65	65	95	45

C. Analyse des productions des élèves

Nous pouvons relever grâce au dépouillement que les élèves connaissent les figures qui leur sont présentés. Pour les exercices 2, 3 et 5, ils ont tous coché une bonne réponse mais pas toutes les bonnes réponses. Ils font implicitement la partition :

triangles équilatéraux / triangles isocèles / triangles rectangles

losanges / rectangle / carré.

Ceci n'est pas étranger au comportement des enfants dans la vie pratique. Si un enfant veut ranger son placard, il fait naturellement des tas disjoints : ici les dessous, là les pantalons, etc. C'est ce qu'on appelle faire une partition et cela peut s'ériger en obstacle à la classification par inclusion en usage dans toutes les sciences (classification des espèces en zoologie, etc.).

Cet obstacle de la partition renforce la difficulté à imaginer un triangle à la fois rectangle et isocèle ou un quadrilatère losange et carré.

Ce classement avec des partitions interfère avec des conventions implicites du langage (Lacombe,1984). Par exemple, soit les phrases : « un carré est un rectangle » ou « un carré est un losange avec un angle droit ». Dans la première, le verbe être signifie l'inclusion, dans la seconde, il signifie l'identité. De même l'article « un » peut être un quantificateur ou un cardinal. Par exemple dans la phrase : « un carré est un losange avec un angle droit », les deux premiers « un » n'ont pas la même valeur. Le premier est l'article ordinaire, le second doit s'entendre comme le quantificateur « au moins un ».Même remarque avec le mot « deux ». Par exemple la phrase : « un triangle est isocèle s'il a deux côtés de même longueur » peut induire en erreur si on prend « deux » pour le cardinal 2. En effet si c'est le cas, alors $2 \neq 3$au sens des cardinaux. Et donc isocèle et équilatéral sont incompatibles. Dans la phrase citée, il faut entendre « au moins deux ».

Dans ces situations particulières en rapport avec la logique, le professeur peut proposer, comme remédiation, de donner un contre-exemple. Mais il se rend compte que l'élève qui a fait l'erreur et semble convaincu, recommence quelques jours plus tard. Nous pensons qu'un seul contre-exemple est difficilement convaincant. En effet, l'argument logique que le professeur utilise ne coïncide pas avec la logique naturelle de l'élève. Dans la vie courante, pour réfuter un énoncé communément admis, un seul contre-exemple ne suffit pas pour convaincre un interlocuteur. Il l'accueillera seulement comme une exception à la règle. Ce n'est que s'il y a un grand nombre de contre-exemples que l'interlocuteur changera d'opinion sur l'énoncé.

Cela n'est pas vrai seulement dans la vie courante. C'est vrai aussi dans les sciences expérimentales, au niveau de la recherche. Quand une théorie est établie, parce qu'elle a été utile, un seul fait d'expérience qui la contredit ne suffit pas à l'invalider. On essaie d'adapter la théorie, voire on met en réserve momentanément cette expérience. Ce n'est que si plusieurs faits, contradictoires avec la théorie admise, se révèlent par la suite, ou si une autre théorie, plus performante, explique à la fois les faits anciens déjà expliqués dans la première théorie et aussi les faits nouveaux, qu'on se résout alors à changer de théorie ou à préciser les limites de validité de la première. Donc, malgré un contre-exemple donné par le professeur, il n'est pas surprenant que les élèves persévèrent dans l'erreur.

5. CONCLUSION

Le concept d'obstacle en didactique a permis une refonte de l'interprétation des erreurs des élèves et des modalités de leur production. Elles ne sont plus attribuées exclusivement à des dysfonctionnements erratiques ou à des absences de connaissances. Les erreurs récurrentes (reproductibles et persistantes) sont dues à des conceptionssouvent fausses qui ne sont pas des accidents mais des acquisitions qui avaient leur cohérence et leur domaine de validité.

Le recueil des erreurs dans les productions des élèves a permis de relever et 'identifier certaines erreurs récurrentes que nous avons essayé de regrouper autour de conceptions particulières ou d'obstacles plus généraux et ainsi mieux comprendre certaines difficultés des élèves.

Pour identifier ces obstacles, nous nous sommes appuyés sur les recherches antérieures pour pouvoir les mettre en relation. Plusieurs peuvent coexister, entrer en conflit ou trouver un terrain d'entente. Par exemple, les conceptions de la linéarité, ou bien l'aspect « partition » versus l'aspect « inclusion ». Rejeter l'un conduit à l'autre jusqu'à la solution.

Les obstacles ne sont pas évacués par un enseignement « bien fait », ils sont simplement refoulés, et avec le temps ressurgissent comme un savoir familier ou mode de pensée, mieux ancré que le savoir enseigné du fait de son antériorité. Le traitement didactique des obstacles est d'autant plus délicat qu'il peut sembler exister autant de conceptions que d'élèves. Il n'y a pas de solution universelle et, selon la nature et l'importance de l'obstacle, l'enseignement peut les ignorer, les dénoncer ou faire buter les étudiants sur la difficulté.

Ces obstacles relevés dans cette recherche posent un certain nombre de problèmes d'ingénierie que nous essayerons d'aborder dans une recherche future: Peut-on éviter tous ou certains obstacles? Doit-on le faire?Comment franchir ceux qui ne peuvent pas être évités?

BIBLIOGRAPHIE

- Artigue M. (1990) : Epistémologie et didactique, Recherches en Didactique des mathématiques, Vol. 10(2.3) pp. 241-286.
- Artigue M. et Robinet J. (1982) : Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, in Recherches en Didactique des mathématiques, Vol. 3(1) pp. 5-64.
- Astolfi J.-P. (1990) : Les concepts de la didactique des sciences, des outils pour lire et construire les situations d'apprentissage. Disponible sur :http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/recherche-et-formation/RR008-02.pdf [consulté le 10/04/2015].
- Astolfi J.-P. et Develay M. (2002) : Didactique des sciences, PUF, Que sais-je ? n° 2448.
- Bachelard G. (1996) : la formation de l'esprit scientifique, Edition J. Vrin.
- Bagni G. T. (2000) : "Simple" rules and general rules in some high school students mistakes. Disponible sur : http://xoomer.virgilio.it/gbagni/Simple%20rules%20and%20general%20rules%20in%20some%20High%20School%20students'%20mistakes.htm [consulté le 10/02/2015]

- Berthelot C. et Berthelot R. (1983) : Quelques apports de la théorie des situations à l'étude de l'introduction de la notion de limite en classe 1ère A. (DEA). Publications de l'IREM de Bordeaux.
- Bronner A. (1997) : Analyse a priori de séquence de formation à propos des décimaux, Disponible sur :
- http://www.arpeme.fr/documents/7F104737AC56017B5B3E.pdf[Consulté le 12/3/2015].
- Brousseau G. et .N. (1987) : Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. IREM de Bordeaux.
- Brousseau, G. (1983) : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, in Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 4(2), pp.165- 198.
- Brousseau G. (1998) : Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Charnay R., Mante M. (1991) : De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes… Disponible sur : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/48/48n5.pdf [consulté le 10/01/2015]
- Develay M. (1992) : *De l'apprentissage à l'enseignement : pour une épistémologie scolaire*. ESF.
- Duroux, A. (1982). La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure. Publications de l'IREM de Bordeaux.
- El Bouazzaoui H. (1988) : Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction,Thèse de doctorat, Université Laval.
- Giordan A. et De Vecchi G. (1987) : Les origines du savoir : des conceptions des élèves aux concepts scientifiques, Edition Delachaux et Niestlé.
- Giordan A. et De Vecchi G. (2002) : L'enseignement scientifique : Comment faire pour que "ça marche" ?, Edition Delagrave Pégagogie et Formation.
- Giordan A (1996) : Les conceptions de l'apprenant : Un tremplin pour l'apprentissage. Sciences humaines Hors série n°12, pp. 48-50.
- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs, in Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 2(3), pp. 303-346.
- Lacombe D. (1984) : Les composantes du raisonnement mathématiques, Les modes de raisonnement, textes des communications du second colloque de l'Association pour la Recherche Cognitive, Orsay.
- Mankiewicz R. (2001) :L'histoire des mathématiques,Editions Seuil.
- Rogalski J. (1982) : L'acquisition de notions relatives à la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur, surface), in Recherches en Didactique des mathématiques, Vol. 3(3), pp. 343-396.
- Sierpinska A. (1985) : Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, in Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 6(1), pp. 5-67.

- Berthelot C. et Berthelot R. (1983) : Quelques apports de la théorie des situations à l'étude de l'introduction de la notion de limite en classe 1ère S. (DEA). Publications de l'IREM de Bordeaux.
- Bronner A. (1997) : Analyse a priori de séquence de formation à propos des décimaux. Disponible sur :
- http://www.ugene.fr/documents/PE1047327AQ560178SHAF.pdf[Consulté le 12/3/2015]
- Brousseau G. et N. (1987) : Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. IREM de Bordeaux.
- Brousseau, G. (1983) : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, in Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 4(2), pp.165- 198.
- Brousseau G. (1998) : Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Charnay R., Mante M. (1991) : De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes... Disponible sur : http://www.web-lettres.grenoble-fr/enseignement_info/W4sn5.pdf [consulté le 10/01/2015]
- Develay M. (1992) : De l'apprentissage à l'enseignement : pour une épistémologie scolaire. ESF.
- Duroux, A. (1982). La valeur absolue, difficultés majeures pour une notion mineure. Publications de l'IREM de Bordeaux.
- El Bouazzaoui H. (1988) : Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction. Thèse de doctorat. Université Laval.
- Giordan A. et De Vecchi G. (1987) : Les origines du savoir : des conceptions des élèves aux concepts scientifiques. Edition Delachaux et Niestlé.
- Giordan A. et De Vecchi G. (2002) : L'enseignement scientifique : Comment faire pour que "ça marche" ?. Edition Delagrave Pédagogie et formation.
- Giordan A (1996). Les conceptions de l'apprenant : Un tremplin pour l'apprentissage. Sciences humaines Hors série n°12, pp. 48-50.
- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. in Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 2(3), pp. 303-346.
- Lacombe D. (1984) : Les composantes du raisonnement mathématique. Les modes de raisonnement, textes des communications du second colloque de l'Association pour la Recherche Cognitive. Orsay.
- Mankiewicz R. (2001) : L'histoire des mathématiques. Editions Seuil.
- Rogalski J. (1982) : L'acquisition de notions relatives à la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur, surface), in Recherches en Didactique des mathématiques, Vol. 3(3), pp. 343-396.
- Sierpinska A. (1985) : Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, in Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 6(1), pp. 5-67.