

Les coniques dans l'enseignement secondaire au Liban: conceptions et difficultés

ISSA Jocelyne, Ecole doctorale des sciences humaines, Département de l'éducation-didactique des sciences, Université Libanaise, Email : joc.issa@gmail.com

HAYFA Nina, Professeur associé, Faculté de Pédagogie, Université Libanaise, Email: ninhay@yahoo.fr

GREIGE Hanna, Professeur, Directeur du département de mathématiques, Université de Balamand Email: hanna.greige@balamand.edu.lb

Résumé

Le présent article résume une partie de la recherche menée dans le cadre de notre thèse de doctorat en didactique des mathématiques au sujet des coniques au Liban. Nous nous intéressons aux différentes conceptions émergentes à partir de la transposition didactique en les liants aux difficultés rencontrées par les élèves de la classe de terminale-série sciences générales. L'objet « conique » est riche en définitions et représentations sémiotiques. Une analyse du programme libanais ainsi que celle des deux manuels les plus utilisés dans les écoles libanaises permettent de déterminer les définitions prégnantes, les registres favorisés et deux conceptions émergentes de cet objet. L'analyse d'un test proposé à un échantillon d'élèves de SG montre une différence dans la réussite des tâches en mobilisant l'une ou l'autre de ces conceptions ainsi que l'importance de la conversion pour la résolution de problème.

Abstract

This article summarizes a part of the research carried out in our PhD thesis in mathematics education about the learning of conics in Lebanon. We are especially interested to define the different conceptions emerging from the didactic transposition and to define their impact on the difficulties encountered by the students of grade 12- General Sciences. Conics is rich as definitions and semiotic representations An analysis of

the Lebanese program as well as the two most used books in the Lebanese schools shows the favored definitions and registers in addition of two emerged conceptions of this object. The analysis of a test proposed to a sample of GS students shows the difference between the success of the tasks mobilizing these conceptions and the importance of the conversion for problem solving.

ملخص

يلخص هذا البحث جزء من أطروحة الدكتوراه في تعليم الرياضيات حول تعليم وتعلّم المخروطي في لبنان. هدف البحث هو تحديد تصورات هذا المفهوم وربطه بصعوبات طلاب الصف الثانوي الثالث - فرع علوم العامة . المخروطي غني بتعاريفه وطرانق تمثيله. تحليل محتوى المنهج البناني و الكتابين الأكثر استخداما في المدارس اللبنانية يحدّد التعاريف وطرانق التمثيل المتاحة وأيضا اثنتان من التصورات المنبثقة حول المخروطي. تحليل اختبار مقترح على عينة من طلاب الصف الثانوي الثالث - فرع علوم العامة - يظهر العلاقة بين نجاح المسائل التي تحقّق استعمال هذه المفاهيم وأهميّة التحويل من تمثيل إلى لآخر في حل المسائل.

Mots clés

Conique, conceptions, difficultés, registre de représentation, didactique des mathématiques

Introduction

La recherche présentée dans cet article résume une partie de la recherche que nous menons dans le cadre de notre thèse de doctorat en didactique des mathématiques au sujet des coniques dans l'enseignement secondaire au Liban. L'enseignement et l'apprentissage de cette notion furent l'objet de quelques recherches en didactique des mathématiques dont les conclusions, datant parfois de plusieurs dizaines d'années, sont toujours d'actualité. En particulier, reprenant les travaux de Trgalova

(1995) et de Bongiovanni (2001)¹, nous remarquons que cette notion est en elle-même problématique vu sa richesse tant au niveau épistémologique que didactique, de plus le grand écart entre le savoir savant et le savoir à enseigné correspondants et son statut inexploré dans le processus enseignement/apprentissage. Ceci nous amène à nous questionner sur les différentes conceptions émergentes à partir de la transposition didactique de cet objet mathématique, dans le contexte libanais, et de les lier aux difficultés rencontrées par les élèves de la classe terminale–série sciences générales dans leur apprentissage de cette notion. Nous essayons précisément de répondre aux questions suivantes:

- Comment les manuels présentent-ils la notion de conique après la réforme de 2001: définitions proposées, conceptions susceptibles d'émerger, cadres, registres et conversions favorisés ?
- Comment les élèves de SG conçoivent-ils l'objet conique selon les trois axes : définition(s), difficultés rencontrées dans le traitement de tâches variées sur cet objet ainsi que dans la résolution d'un problème de conique mobilisant les définitions géométriques.

Dans cet objectif, nous faisons une analyse détaillée de deux manuels les plus utilisés dans les écoles libanaises pour déterminer les différentes conceptions émergentes de l'objet « conique ». Ensuite, nous analysons les réponses d'un échantillon d'élèves de SG à un test afin de mettre en relief leurs difficultés et les lier aux conceptions déjà définies.

1- Analyse des manuels

Une étape importante de l'analyse de la transposition didactique consiste en l'analyse des manuels, surtout dans le cas des coniques, puisque ces derniers constituent une référence importante pour les enseignants dans la construction de leurs cours. Nous avons analysé deux manuels: le manuel national « *construire les mathématiques* » et celui de

¹Les recherches sur les coniques en didactique des mathématiques sont très rares. L'apprentissage des coniques est pratiquement inexploré, ceci à cause de l'élimination de l'enseignement des coniques dans plusieurs pays. A titre d'exemple, la France suite à la réforme de 1997, a abandonné « *le chapitre mythique sur les coniques...* »

la « *collection puissance* ». Ces manuels sont les plus utilisés au Liban et les seuls dans les établissements scolaires où nous avons fait passer le test par la suite. Cette analyse est faite selon trois axes: une analyse anthropologique au sens de Chevallard, une analyse conceptuelle au sens de Vergnaud et une analyse en termes de registres de représentations sémiotiques au sens de Duval.

1-1 Analyse anthropologique des manuels

Chevallard (1996) considère que « *toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume le mot de praxéologie* ». Ce type d'analyse nous a permis de déterminer les différentes organisations mathématiques et didactiques proposées dans chacun des manuels ainsi que la conformité de chacun d'eux aux objectifs du curriculum. Nous avons ainsi pu déterminer les différentes définitions de cet objet dans la transposition didactique correspondante. Nous remarquons que dans le contexte libanais, les coniques sont introduites selon la définition monofocale¹. Cependant, un passage rapide vers leurs équations algébriques est par la suite effectué. La proposition selon la définition bifocale apparaît comme propriété dans les deux manuels alors que la définition de lieu géométrique des centres de cercles étant institutionnalisée dans le manuel privé mais pas dans le manuel national.

L'analyse anthropologique a été à la base de l'identification des conceptions émergentes à partir des manuels.

1-2 Analyse conceptuelle des manuels

L'analyse conceptuelle au sens de Vergnaud (1990) modélise un concept par un triplet de trois ensembles $C=\{S, I, S\}$ où S est l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept, I l'ensemble des invariants

¹ Une conique est le lieu géométrique des points M tel que le rapport de la distance de M à un point et à une droite fixe est une constante positive : c'est-à-dire ensemble des points M tel que $\frac{MF}{d(M;(d))}=e$, F étant un point fixe, (d) une droite donnée et e une constante positive.

sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) et S est l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant). Nous nous intéressons à définir les différentes conceptions susceptibles d'émerger à partir des classes de situations proposés dans chacun des manuels, à la lumière des organisations mathématique et didactique définies précédemment. En effet, la construction chez l'élève d'une conception relative au concept de conique est favorisée par la fréquence des exercices et problèmes dont les techniques y sont conformes. Les deux conceptions déterminées sont les suivantes:

- la conception C_1 : « une conique est une courbe algébrique du second degré ayant des caractéristiques données: foyer, directrice, excentricité, axe focal, paramètre, sommets etc... ». Dans ce cas, une conique est manipulée ainsi que ses éléments d'une façon algébrique en dehors de tout raisonnement géométrique et de tout investissement des propriétés géométriques.
- la conception C_2 : « une conique est un lieu géométrique de points définis par une certaine relation métrique ou géométrique (définition monofocale, bifocale, lieu des centres des cercles....) ». Selon cette conception, les éléments d'une conique jouent un rôle important dans la définition d'une conique et ne semblent pas être une déduction presque « insensée » de son équation algébrique.

Nous remarquons que les deux manuels considérés montrent une suprématie de la conception C_1 par rapport à la conception C_2 , que ce soit à partir de l'ensemble des invariants opératoires ou des situations qui y sont proposés.

1-3 Analyse des manuels en termes de registres

Duval (1993) considère qu'une bonne conceptualisation d'un objet mathématique repose principalement sur la disposition du sujet de plusieurs registres de représentation et de la nécessité de coordination entre ces registres. L'analyse des manuels a permis de repérer d'une part, les cadres et registres privilégiés dans chacun et déterminer, d'autre part, les types de conversion favorisées.

Les résultats montrent une très grande ressemblance entre les deux manuels selon différents points: le cadre analytique est de loin plus utilisé dans les exercices que le cadre géométrique, la majorité des tâches sont des tâches de conversion routinières et un nombre réduit correspondant à des tâches problématiques.

En examinant de près les tâches selon la nature des registres d'entrée et de sortie de la question, nous remarquons une primauté totale du registre algébrique¹ en tant que registre d'entrée dans les deux manuels et celle du registre caractéristique² en tant que registre de sortie. Les autres registres apparaissent avec des pourcentages minimes, les registres métrique³, graphique⁴ ou figure géométrique⁵ étant presque masqués en tant qu'entrée ou sortie. De plus, nous constatons que la majorité des tâches de conversion est faite du registre algébrique vers le registre caractéristique. Ceci met en relief l'importance accordée au type de tâche résidant en la détermination des éléments d'une conique définie par son équation algébrique. Ce résultat vient confirmer l'émergence de la conception C_1 dans l'analyse conceptuelle des deux manuels résumée précédemment. Donc l'analyse en termes de registres nous permet de conclure que le registre algébrique apparaît en toute suprématie dans les tâches proposées dans les deux manuels, les autres registres étant presque masqués.

¹ Registre algébrique: conique définie dans le plan cartésien par son équation algébrique générale ou réduite ou paramétrée

² Registre caractéristique: conique définie par la donnée de certains éléments caractéristiques: la(ou les) directrice(s), la (ou les) foyers et l'excentricité, ou bien par son centre, axe focal, sommets...

³ Registre métrique: conique définie par une relation métrique que vérifie un point appartenant à une conique (monofocale ou bifocale) ou autre propriété de lieu géométrique des centres des cercles

⁴ Registre graphique: conique définie par son graphique dans un repère

⁵ Registre figure géométrique : conique définie par une figure géométrique

2- Analyse du test élèves

Le test que nous avons conçu a pour objectif de déterminer les difficultés des élèves de SG relativement à leur apprentissage de l'objet « conique » et les lier par la suite aux différentes conceptions déterminées auparavant. Nous visons alors déterminer comment les élèves conçoivent l'objet conique à partir de sa définition qu'ils avancent, émerger leurs compétences dans la conversion entre les différents cadres et registres et déterminer l'impact de la définition et de la conversion sur la résolution de problème qui est un des objectifs principaux de l'enseignement des mathématiques recommandés dans le curriculum libanais « *comme l'activité la plus significative dans l'enseignement des mathématiques* ».

2-1 Contenu et conditions de passation du test

Le test est formé de 19 tâches réparties en trois parties réservées à chacune des compétences: définition, conversion et résolution de problème (voir annexe). Il a été passé à 331 élèves dans 25 classes de 25 établissements différents, publics et privés de la région du Mont Liban¹. A part la partie du test collectant les informations générales de l'élève, nous précisons rapidement le contenu de chaque partie: la première regroupe des tâches concernant la reconnaissance des différentes définitions de l'objet conique, la deuxième consiste en une série de tâches de conversion entre les différents registres et la troisième est réservée à la résolution d'un problème de conique proposé dans le cadre géométrique.

¹ Le test a été fait passer dans les écoles de la région de Kesrouan où nous enseignons. Notre échantillon n'est certainement pas représentatif vu que l'objectif de notre recherche n'est pas de généraliser les résultats mais de tirer des conclusions concernant un groupe d'élèves de SG. Cependant, vu que le nombre d'élèves des écoles publiques de Kesrouan était plus petit que celui des écoles privées, et afin d'équilibrer ce nombre entre les deux types d'écoles, nous avons étendu l'échantillon aux régions voisines qui sont Jbeil et Metn. Nous sommes certainement conscients de la limitation de notre échantillon comme signalé dans la conclusion. Cependant, les résultats peuvent refléter certains aspects de la situation de l'apprentissage des coniques.

2-2 Analyse des résultats du test

Les résultats du test sont analysés selon trois approches: une analyse descriptive, à deux dimensions micro et macro descriptive, une analyse multivariée avec le logiciel SPSS en addition une modélisation en équations structurelles SEM avec le logiciel AMOS.

2-2-1 Analyse micro descriptive du test

L'analyse micro descriptive consiste en l'analyse de fréquence de réussite de chaque tâche ainsi qu'au croisement de certaines d'entre elles. Elle montre qu'en majorité, les élèves réussissent les tâches qui mobilisent la conception C_1 reposant surtout sur les types de conversion à partir du registre algébrique et par suite sur la mémorisation de certaines formules relatives à l'équation algébrique de la conique. Cependant, lorsqu'il s'agit de certaines conversions surtout à partir du registre métrique, nécessitant la mobilisation de la conception C_2 , les fréquences de réussite ont remarquablement diminué. De plus, très peu (13.6%) sont les élèves qui ont réussi à résoudre le problème proposé. Ces résultats s'alignent avec ceux de la recherche de Yavus (2005) sur les fonctions. En effet, il a montré que les manuels français privilégient « de façon massive » le registre algébrique bien que les intentions du programme français visent un renforcement de l'utilisation des divers modes de représentation des fonctions. De plus les élèves sont plus performants dans l'accomplissement des tâches manipulant le registre algébrique. Il montre également l'importance de la conversion entre différents registres pour la compréhension de la notion de fonction.

2-2-2 Analyse macro descriptive du test

L'analyse macro descriptive consiste à rendre la base de données quantitative en attribuant à chaque élève un score qui n'est autre que la note qu'il obtient au test sur 100 répartie comme suit: 33.33% sur la partie définition, 33.33% sur la partie conversion et 33.33% sur la partie résolution du problème, chaque question des deux parties définition et conversion étant affectée du même coefficient.

Les résultats de cette analyse sont les suivants: une corrélation significative entre la majorité des variables, une corrélation positive

spécifiquement entre la variable résolution de problème et les variables concernant les activités de conversion surtout celles qui manipulent le registre métrique et figure géométrique. Donc l'élève qui réussit ces activités, réussit davantage la résolution du problème.

Pour éclaircir ce résultat nous faisons une analyse à régression multiple (Stepwise) permettant de dégager les variables prédisant de la meilleure façon la variable résolution de problème. Après la vérification des postulats d'application d'une telle analyse, ses résultats montrent que la réussite de la résolution de problème est fortement en lien avec la manipulation du registre métrique, figure géométrique et graphique ; la réussite des tâches de conversions à partir du registre algébrique ne semblant pas influencer la résolution du problème.

L'analyse macro descriptive a également montré que la moyenne des scores des élèves des lycées publics (46/100) est légèrement supérieure à celle de ceux des lycées privés (43.14/100) bien qu'elle soient toutes deux pas trop élevées (ceci à cause de la non réussite du problème). Cependant, il n'existe pas de différence significative entre les résultats des élèves des lycées publics et ceux des lycées privés, ce en comparant leurs moyennes par le test d'indépendance pour échantillons indépendants. Ceci nous permet de déduire que tous les élèves considérés appartiennent à la même population et par suite qu'ils ont suivi un mode d'enseignement des coniques relativement identique.

2-2-3 Analyse à composantes principales

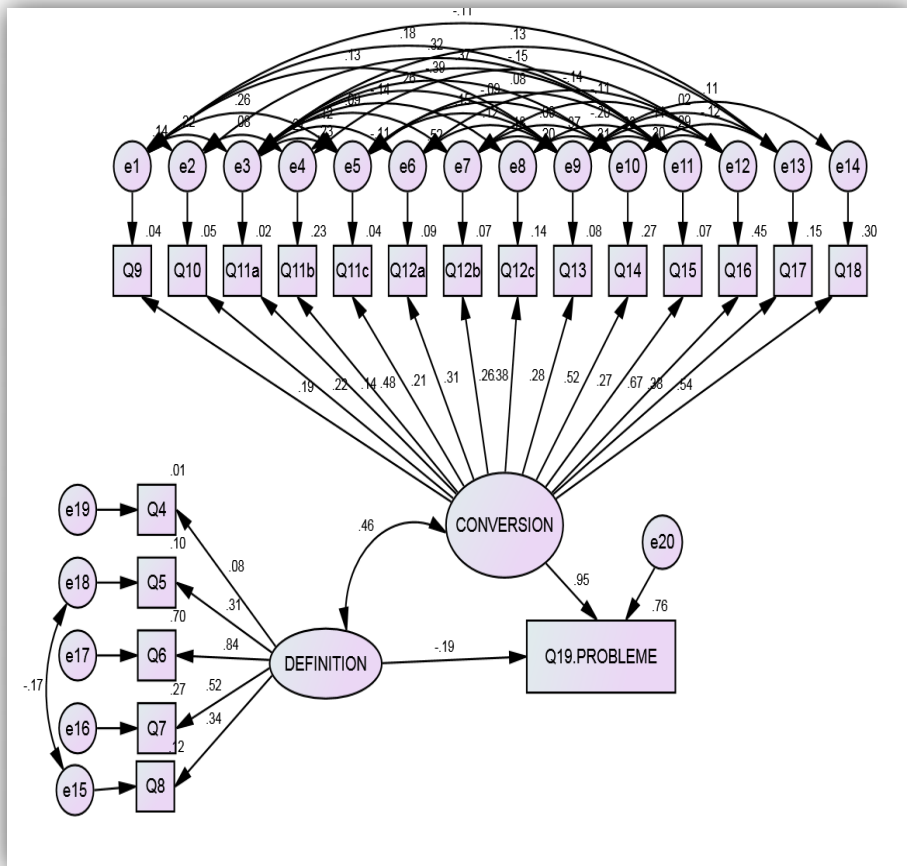
L'approche multivariée consiste en une analyse à composantes principales (ACP) permettant de tirer les facteurs explicatifs résumant la plupart de la variance. A partir de cette analyse, nous visons déterminer les différentes associations des variables vu leur nombre important, en les catégorisant par des facteurs moins nombreux, ceci pour mieux comprendre la structure interne de nos données.

Après la vérification des postulats ainsi que l'application de l'ACP, nous avons pu extraire sept facteurs à partir des 20 variables considérées expliquant presque 63% de la variance. L'ACP nous permet de soulever plusieurs points importants: les variables considérées peuvent ainsi être

résumées par les facteurs cités par ordre décroissant de représentation de la variance: «manipulation du registre métrique», «manipulation des registres algébrique et caractéristique», «reconnaissance des définitions», «conversion à partir du registre graphique», «conversion vers le registre graphique», «reconnaissance des graphes et traduction algébrique de la propriété monofocale» et «reconnaissance des définitions bifocales et lieu des centres de cercles». Nous avons ainsi mis en relief l'importance du registre métrique pour la résolution du problème et du test. En effet, les tâches de conversion à partir de ce registre ainsi que la résolution du problème constituent ensemble le premier facteur. L'importance du registre graphique est également pointée ainsi que l'équilibre entre la manipulation des registres algébrique et caractéristique ainsi que la reconnaissance des définitions étant certainement indispensable.

2-2-4 Modélisation par équations structurelles SEM

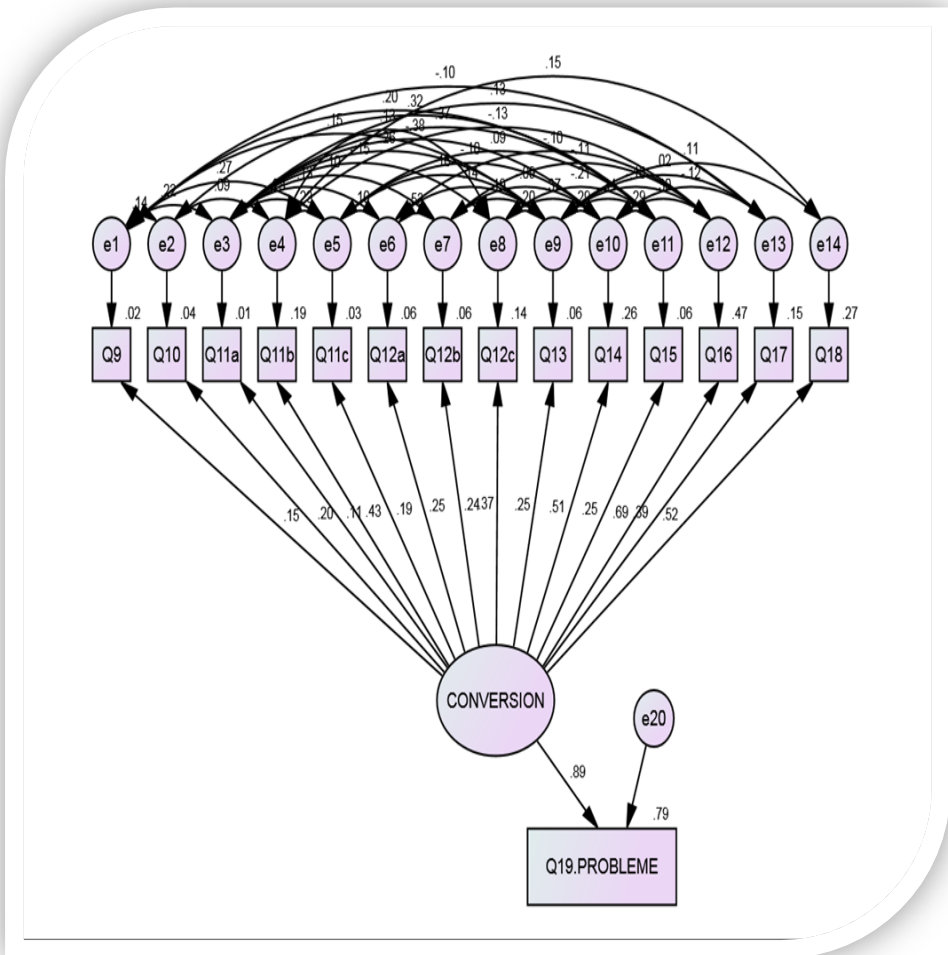
Afin d'approfondir notre investigation, concernant surtout l'étude de l'impact de la reconnaissance et de la conversion sur le raisonnement géométrique résidant dans la résolution de problème, nous avons choisi finalement la méthodologie de la modélisation par équations structurelles SEM. Le but de cette approche est d'examiner un ensemble de relations entre une ou plusieurs variables indépendantes considérées comme des variables prédictives ou causales d'une ou de plusieurs variables dépendantes. A ce niveau, notre investigation concerne spécialement la détermination de l'impact de ces deux variables exogènes ou indépendantes (définition et conversion) sur la variable endogène ou latente qui est résolution de problème. Le logiciel AMOS utilisé dans notre cas, fournit une sortie graphique de cette modélisation résumant les effets de causalité entre les variables considérées. Suite à la vérification des postulats d'application d'une telle approche ainsi que la qualité d'ajustement du modèle structurel obtenu assurée par l'examen des indices absolus, incrémentaux et de parcimonie, nous considérons dans un premier temps le modèle généré d'une part par les deux variables exogènes «définition et conversion» et d'autre part par la variable endogène «résolution de problème» qui est le suivant:



Modèle1: modèle causal de la définition, conversion et résolution

Nous remarquons tout d’abord qu’il existe une corrélation positive (0.46) entre les deux variables définition et conversion, même si elle n’est pas relativement élevée. Ensuite, il existe un fort lien de causalité entre la conversion et la résolution du problème d’une part et la définition et le problème d’autre part. La valeur finale de r pour ce modèle est de 0.76, considérée comme significative et élevée, montre que les variables définition et conversion expliquent 76% de la variation de la variable résolution de problème. Afin de pointer davantage l’impact de la conversion sur la résolution de problème, nous avons exclu la variable

définition afin de déterminer un deuxième modèle constitué par la variable exogène conversion et la variable endogène résolution. Le deuxième modèle généré est le suivant :



Modèle2: modèle causal de la conversion et résolution

Nous remarquons que la valeur de r devient 0.79. Ceci implique que la variable conversion explique 79% de la variation de la variable

résolution de problème. D'autre part, l'augmentation de la valeur de r du modèle 1 au modèle 2 suite à l'exclusion de la variable définition, montre davantage l'important impact de la variable conversion sur la résolution du problème. Nous pouvons ainsi affirmer que les activités de conversion agissent positivement sur la résolution de problème. Donc la difficulté des élèves dans la résolution du problème qui est liée à une déficience de la mobilisation de la conception C_2 devait être surmontée par une favorisation des activités de conversion.

Conclusion

L'objectif de cette recherche est de déterminer les conceptions émergentes à partir de la transposition didactique de la notion de conique dans le contexte libanais en les liant aux difficultés des élèves de la classe terminale-série sciences générales. L'analyse des deux manuels les plus utilisés a donc permis de montrer l'émergence de deux conceptions: la première C_1 liée fortement au registre algébrique et une autre C_2 liée au registre métrique ainsi que la dominance de la conception C_1 par rapport à la conception C_2 et la prégnance du registre algébrique. Les résultats du test montrent que les élèves réussissent majoritairement les tâches qui mobilisent la conception C_1 reposant surtout sur les types de conversion à partir du registre algébrique et par suite sur la mémorisation de certaines formules relatives à l'équation algébrique de la conique. Cependant, lorsqu'il s'agit de certaines conversions mobilisant la conception C_2 en dehors de toute manipulation algébrique des coniques, la réussite était minime. D'autre part, un important lien de causalité a été déterminé entre la réussite des tâches de définition et de conversion et celle du problème. Ceci montre l'importance des activités de reconnaissance des différentes définitions d'une conique en général et des coniques particulières. De plus, notre étude souligne l'importance de varier les tâches de conversion manipulant les différents registres qui représentent les coniques ; surtout vu l'impact prégnant des conversions sur la réussite de la résolution de problème. Notons que cette dernière est en elle-même un des objectifs fondamentaux de l'apprentissage des mathématiques basé sur le développement du raisonnement chez l'élève. Finalement, malgré la limitation de l'échantillon et des manuels, nous espérons que cette

recherche apporte quelques éléments intéressants aux concepteurs du programme libanais, aux enseignants et formateurs des enseignants au cycle secondaire et surtout à ceux qui s'intéressent à la recherche en didactique des mathématiques notamment à l'étude des coniques qui n'a pas été traité, jusqu'à présent, d'une manière approfondie¹.

¹ Pour toute clarification vous pouvez consulter notre thèse « *les coniques dans l'enseignement secondaire au Liban: conceptions et difficultés* » qui va être soutenue prochainement.

References

1. **BONGIOVANNI, V. (2001).** *Les caractérisations des coniques avec Cabri-Géomètre, en formation continue d'enseignants: étude d'une séquence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
2. **CHEVALLARD, Y. (1996).** L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol 19/2 p.221-266.
3. **DUVAL, R. (1993).** Registres de représentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de science cognitives*, 5, IREM de Strasbourg.
4. **TRGALOVA, J. (1995).** *Étude historique et épistémologique des coniques et leur implémentation informatique dans le logiciel cabri-géomètre*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
5. **VERGNAUD, G. (1990).** Psychologie de développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple les structures additives. *Petit x*, n°22, pp 51 – 69. 354
6. **YAVUS, I. (2005).** *Evolutions récentes de l'enseignement de la notion de fonction en France en classe de seconde. Utilisation des tableaux de valeurs et de variations*. Thèse de Doctorat, Université Lumière - Lyon II.

Manuels de mathématiques

1. **CRDP libanais (2001)** : *Construire les mathématiques*. Classe ES3 (SG). Ministère de l'éducation libanais.
2. **Al-Ahlia (2013)** : *Mathématiques*. Collection puissance. Classe ES3 (SG)