Les difficultés inattendues d'une ingénierie
Enseignement des nombres relatifs en classe de EB6

Nawal Abou Raad(*)

Résumé:

Ce travail étudie, en situation d'enseignement à partir d'une ingénierie sur les «Nombres Relatifs» en classe de EB6 d'une école libanaise privée, les difficultés d'une enseignante et de ses élèves qui ne trouvent plus un terrain d'entente. Nous avons analysé les difficultés de la construction d'une référence commune en classe par les élèves et leur enseignante, et les processus conjoints de construction des milieux de l'étude, afin d'assurer la venue et l'étude d'un objet mathématique nouveau.

Mots clé:

milieu, action conjointe, nombres relatifs, ingénierie.

I - Introduction

Dans ce travail, nous nous attachons à pointer l'émergence d'un (ou des) milieu(x), non pas comme l'indiquent Schubauer-Leoni et al (2007) à propos de l'étude «du didactique ordinaire», mais à propos d'un enseignement sur la base d'une ingénierie didactique (Activités d'étude et de recherche AER) préparée par le groupe français (CD) AMPERES. Nous ne cherchons pas à valider cette AER (Abou Raad, 2014). Nous voulons, in situ, pointer les difficultés des acteurs du système didactique a) en raison des savoirs mobilisés par l'enseignante, d'une classe de EB6 dans une école libanaise privée, dans la mise en pratique de l'ingénierie sur les Nombres Relatifs; b) en raison des procédures et des réflexions de ses élèves; c) en raison de la distance du topos de ses élèves au sein de la chronogenèse.

(*) Université Libanaise, Faculté de Pédagogie.

L'enseignement actuel des mathématiques, aussi bien en France qu'au Liban, est l'exposé non motivé d'objets mathématiques. Dans les meilleures des cas, des «exercices d'application» sont proposés pour que les «techniques» de résolution standards puissent être montrées et les «activités préparatoires» apparaissent comme du temps perdu. Le travail engagé par l'équipe au sein du projet (CD) AMPERES se propose d'élaborer des PER (Parcours d'étude et de recherche) constitués de plusieurs AER dont l'objet est de motiver et fonder un savoir. Leur but est de «redynamiser l'enseignement des mathématiques» - c'est-à-dire rendre les élèves auteurs, et non spectateurs des mathématiques. Le programme des AER assume un changement de finalité par rapport à celle initialement assignée aux ingénieries de première génération (Perrin-Glorian, 2011). La question n'est plus de rechercher la possibilité d'enseigner une notion mathématique avec toutes les propriétés souhaitées, en faisant en sorte que la classe construise la notion comme réponse à une question qu'on lui dévolue, mais plutôt une extension possible au système «Comment pourrait-on créer les conditions d'enseignement de cette notion dans un nombre significatif de classes et auprès d'un nombre significatif d'élèves par classe?» (Matheron, 2009).

Le point de départ d'une AER est une question ou un ensemble de questions qui, en respectant le programme officiel, dévolue aux élèves une tâche dont l'exécution contribue à l'élaboration des réponses aux questions posées. Une AER est supposée laisser une large place à l'action et à la réflexion des élèves. Elle permet de réaliser une première rencontre avec un type de tâches nouveau, puis elle prend en charge l'émergence d'une technique permettant d'accomplir efficacement la tâche et il reste à constituer l'environnement technologico-théorique relatif à la technique (Chevallard 1998, 2002, 2004), pour que le savoir soit institué à partir de l'étude conduite par les élèves. Pour ceci, nous avons voulu voir in situ comment se réalise, en classe de EB6, le travail d'une AER sur les nombres relatifs.

Notre hypothèse est que, souvent, l'action conjointe des élèves et du professeur, dans le système libanais, éprouve des difficultés à réaliser les trois moments de l'étude de cet AER(1), par ce qu'ils ne s'attendent pas à devoir

(3) Les trois moments sont: 1) la première rencontre avec un type de tâches nouveau, 2) l'émergence d'une technique permettant d'accomplir la tâche 3) la constitution de l'environnement technologico-théorique relatif à la technique (Chevallard 1998, 2002, 2004).

passer par ce chemin et tentent des raccourcis qui conduisent à des quiproquos parfois durables, et parfois des extensions pour aménager un milieu de référence pour l'étude.

II - Eléments théoriques: Le milieu au sein de la didactique des mathématiques

Brousseau (1986, 1990) fut le premier à mettre en évidence, une notion centrale en théorie des situations didactiques, initiée à partir de la conception piagétienne: la notion de milieu. La modélisation du milieu dans cette théorie se réfère explicitement à l'apprentissage par adaptation.

«L'élève apprend en s'adaptant à un milieu [...] Ce processus psycho-génétique piagétien est à l'opposé du dogmatisme scolastique. L'un ne semble rien devoir à l'intention didactique, alors que l'autre lui doit tout. En attribuant à l'apprentissage naturel, ce qui repose sur l'art d'enseigner selon le dogmatisme, la théorie de Piaget risque de soulager le maître de toute responsabilité didactique: ceci constitue un paradoxal retour à une sorte d'empirisme! Mais un milieu sans intention didactique est manifestement insuffisant à induire chez l'élève toutes les connaissances culturelles que l'on souhaite qu'il acquière» (Brousseau, 1986, p. 49).

Salin (2002) résume l'idée de Brousseau (1986) en parlant d'un milieu «antagoniste de l'élève» qui pour provoquer l'apprentissage «doit être facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibre donc d'adaptation pour l'élève, mais qui permet le fonctionnement «autonome» de l'élève» (p. 114).

Brousseau (1990) et Margolinas (1995, 1999) ont mis l'accent sur l'emboîtement des différents niveaux de lecture que peut faire le chercheur des actions du professeur et des élèves, dans un développement du modèle en termes de «structuration du milieu». Comiti, Grenier, & Margolinas (1995) ont nommé «bifurcation» le fait que le milieu dans lequel évolue un certain nombre d'élèves n'est pas celui supposé par le professeur. C'est en raison de ces bifurcations que le professeur éprouve des difficultés. Kazan (2014) a mis en évidence le phénomène du «dédoublement des milieux» dans certaines phases de trois séquences différentes d'enseignement, en France et au Liban.

En théorie anthropologique du didactique, Chevallard (1992, p.103) dit que l'établissement d'un milieu est une des conditions nécessaires au fonctionnement des systèmes didactiques. L'auteur présuppose pour tout projet d'enseignement, l'existence d'un milieu qu'il nomme milieu *institutionnel*. Il indique que le fonctionnement du système didactique fait «bouger» ce milieu puisque les rapports personnels des élèves et du professeur aux objets d'enseignement vont se transformer au fil du temps, et il introduit l'idée d'une mésogenèse (ou genèse du milieu): «à chaque instant, le milieu apparaît subjectivement comme un donné; mais c'est en vérité un construit permanent» (idem, p. 95).

Amade-Escot et Venturini (2009, p. 26) dégagent trois points de convergence, sur le milieu.

1) Le milieu n'est pas un «donné» mais un «construit». Il résulte d'un «processus évolutif», la mésogenèse.

2) La simple présence d'un objet dans le milieu ne suffit pas pour qu'il soit reconnu comme tel car le milieu est co-construit par le professeur et les élèves pour qui il fait référence. L'action conjointe du professeur et des élèves engage donc le processus mésogénétique.

3) Les milieux se succèdent, au fur et à mesure de l'apprentissage, mais ils peuvent également se juxtaposer lorsque les acteurs du système didactique évoluent dans des milieux différents.

Il faut signaler que les actions dans le milieu sont régulées par le contrat didactique (Brousseau, 1990) c'est-à-dire les attentes réciproques des élèves et du professeur. Cette solidarité entre les deux notions s'exprime par le fait qu'à tout état de la mésogenèse[(1)], correspond un état de partage des responsabilités entre le professeur et l'ensemble classe (topogenèse[(2)]) en lien avec l'avancée ou la stagnation du temps didactique (chronogenèse[(3)]) eux-mêmes dépendant des

---

(1) La *mésogenèse* désigne le processus par lequel le professeur aménage un milieu avec lequel il attend que les élèves interagissent *pour apprendre*.

(2) La *topogenèse* désigne la partition de l'activité entre le professeur et les élèves. Dans une relation didactique, le professeur doit (par exemple, en assurant la chronogenèse) définir et occuper sa *position*, partager avec les élèves des tâches leur permettant d'occuper en retour leur position dans l'espace didactique, d'assumer ce qui relève de leur responsabilité.

(3) «*La chronogenèse* désigne la progression dans le savoir proposé par le professeur et étudié par les élèves. Ce *progrès* dans la matière de l'enseignement produit, pour les élèves comme pour le professeur, une temporalité propre aux institutions didactiques. Le professeur doit assurer l'avancée du temps didactique (expression synonyme de chronogenèse).

cadres épistémique (relatif au savoir en jeu) et interactionnel (forme des échanges) qui en structure la dynamique (Sensevy, 2007).

III - Eléments méthodologiques

Pour aborder notre étude, de la classe de EB6 dans l'enseignement des «Nombres Relatifs» à partir d'une AER qui n'a pas été produite par le professeur, nous allons

1) indexer les gestes de l'enseignante et la forme que prend l'étude en identifiant les objets avec et sur lequel les élèves et le professeur agissent. Nous classerons ces objets suivant ce que Chevallard (2002, 2004, 2005) a nommé les niveaux de *co-détermination didactique* (Chevallard a indexé sur des critères disposés le long d'une échelle à neuf niveaux, allant du générique au spécifique, les gestes de l'enseignant afin d'enseigner et la forme que prend l'étude par les élèves, du milieu avec, et sur lequel ils agissent pour apprendre. Ces niveaux sont en interaction mutuelle, et sont la civilisation, la société, l'école, la pédagogie, la discipline, le domaine, le secteur, le thème et le sujet);

2) prendre en compte les trois dimensions de l'action enseignante que sont la *mésogenèse*, la *chronogenèse* et la *topogenèse* développées par Sensevey, Mercier et al (2000, 2005);

3) mettre l'accent sur des *ostensisfs*(1) (Bosch et Chevallard 1999) qui sont les descripteurs du rapport des élèves et de l'enseignante aux objets mathématiques qu'ils utilisent localement ou régulièrement.

Notre étude se déploie dans une classe de EB6, d'une école privée mixte, sur une séquence complète d'enseignement des mathématiques comprenant les Nombres Relatifs. L'enseignante observée, appelé **P** dans ce travail, a deux ans

(1) Bosch et Chevallard appellent ostensifs les objets qui ont pour nous une forme matérielle, sensible, au demeurant quelconque. Un objet matériel (un stylo, un compas, etc.) est un ostensif. Mais il en va de même:
- des gestes: nous parlerons d'ostensifs gestuels;
- des mots et, plus généralement, du discours: nous parlerons ici d'ostensifs discursifs (ou langagiers);
- des schémas, dessins, graphismes: on parlera, dans ce cas, d'ostensifs graphiques;
- des écritures et formalismes: nous parlerons alors d'ostensifs scripturaux.

d'expérience professionnelle, et elle est titulaire d'un master professionnel en didactique des mathématiques. La classe est constituée de 12 élèves, âgés de 11 à 13 ans, dont les compétences scolaires sont relativement hétérogènes.

Notre corpus découle de l'observation de la réalisation d'un enseignement que l'enseignante n'a pas pensé et dont elle n'a qu'une description élémentaire. La réalisation est filmée et accompagnée de la prise de notes par nous-mêmes assise au fond de la classe, elle se développe sur huit séances (entre 40 et 50 minutes chacune) comprenant l'introduction, l'addition et la soustraction des nombres relatifs. Nous avons retenu pour cet article les trois séances d'introduction, susceptibles d'éclairer la manière dont l'action conjointe de l'enseignante et des élèves contribue parfois difficilement à la construction d'une référence commune qui sera le milieu didactique de l'action des élèves et les conduira à un apprentissage.

L'introduction des Nombres Relatifs est faite à partir d'un objet défini dans les programmes français et libanais, les «programmes de calcul» dont une forme aboutie est une formule algébrique, mais qui peuvent se trouver exister sous une forme plus élémentaire que l'on peut qualifier de rhétorique (Serfati, 2005). Ainsi P1, le programme de calcul initial proposé est le suivant: *«à un (grand) nombre on ajoute un deuxième et on soustrait un troisième (de valeur proche du deuxième)»* et il est équivalent à sa forme simplifiée: *«à un nombre on ajoute ou on soustrait un second»* qui est le résultat du sous-programme *«on ajoute un deuxième et on soustrait un troisième (de valeur proche du deuxième)»*. L'enseignante a accepté d'appliquer l'ingénierie telle qu'elle est proposée par le groupe (CD) AMPERES, et nous lui avons laissé la liberté complète de gérer sa classe, suivant le principe de la méthode clinique proposée par Leutenegger (2000).

Proposer à un professeur de «réaliser une ingénierie» est une nouveauté dans le système éducatif libanais, et inhabituel pour l'enseignante. Elle est consciente des risques qu'elle prend: les élèves risquent de ne pas trouver le programme de calcul, ce qui engagera la perte d'un temps compté pour avancer dans le programme, mais aussi qu'elle devra à tout moment prendre la décision d'intervenir ou pas, ce qui changera l'observation du chercheur.

IV - L'observation

IV - 1 - Vers un synopsis de l'enseignement donné

Nous allons présenter d'abord un résumé restreint du parcours de l'AER.

Les élèves, à partir d'une fiche d'exercices distribuée et travaillée individuellement[1] *par étapes, découvrent et se familiarisent avec la tâche T1: «exécuter le programme de calcul a + b - c (a, b et c entiers naturels et b > c)» et la Tâche T2: «exécuter le programme de calcul a + b - c (a, b et c entiers naturels; b < c et b > c)».*

Ces tâches ont pour finalité de mettre en échec la technique consistant à réaliser les calculs de gauche à droite en écrivant le résultat après un signe «=». L'enseignante doit pousser les élèves à exprimer leur calcul verbalement. Par exemple, pour calcule 2789 + 25 - 20, ils doivent dire «ajouter 25 et soustraire 20 revient à ajouter 5 à 2789». Le programme de calcul visé est: «à un nombre on ajoute un deuxième et on soustrait un troisième» mais l'enjeu est d'engager les élèves à dire que «exécuter le programme 2789 + 20 - 25 revient à soustraire 5 à 2789» pour qu'ils cherchent à noter cela 2789 - 5, ce qui les engagera à dire que «ajouter 20 et soustraire 25 c'est soustraire 5» puis à noter «-5» le sous-programme «+ 20 - 25».

L'enseignante commence la phase décisive par la question «comment calculer **347 +61 - 62**»? Les élèves sont contraints à imaginer une nouvelle technique pour ce type de tâches qui s'avère problématique. Elle doit mener le débat entre les élèves en mettant le point sur la comparaison entre +61 - 62 et +62 - 61. La question cruciale est alors: à quoi équivaut le programme de calcul «ajouter 61 puis soustraire 62»? Des élèves devraient fournir la seule réponse possible dans le cadre «d'une logique des programmes de calcul» en disant: «à soustraire 1», tout en le justifiant par: «car on soustrait 1 de plus que ce qu'on ajoute»!

Pour convaincre certains élèves de la réponse «ajouter 61 et soustraire 62 revient à soustraire 1», l'enseignante guidera les élèves vers la démonstration de cette équivalence par décomposition de 62 permettant de faire voir 61 dans 62: soustraire 62 revient à soustraire 61 et encore soustraire 1, ce qu'on écrit: + 61 - 62 = + 61 - 61 - 1 = 0 - 1 = -1. D'où la *«mise en évidence des nombres relatifs»*

(1) L'utilisation de la calculatrice n'est permise que pour vérifier les calculs avec l'enseignante.

(Tâche T_3). Les élèves sont amenés à renommer des programmes de calculs de types + a - b, afin de trouver des nombres comme -1, -2, -5, -7, +1, +2, +4, etc. L'enseignante institutionnalise ces nouveaux nombres en explicitant ce que les élèves sont dorénavant supposés connaître.

> *«On voit des nombres nouveaux, précédés d'un signe + ou -, les nombres précédés du signe + s'appellent «nombres positifs» et ceux précédés du signe - s'appellent des «nombres négatifs. Ces nombres dénotent des programmes de calcul.*
>
> *Les nombres positifs et les nombres négatifs sont appelés «nombres relatifs, ils sont écrits avec un signe + ou - et un nombre que l'on appelle la valeur absolue.*
>
> *Le nombre 0 est un nombre à la fois positif et négatif (un programme de calcul équivalent à ajouter 0 est équivalent à un programme équivalent à soustraire 0)».*

A partir des vidéos et de nos notes d'observation, nous avons rédigé un récit pour raconter le déroulement de la séance[(1)]. Nous appelons ce récit l'intrigue didactique parce qu'il induit un découpage de la séance filmée, en épisodes où nous relevons des faits didactiques significatifs. Ces faits, rapportés aux épisodes qui en sont l'environnement, nous permettent d'identifier des phénomènes relatifs à l'émergence des milieux.

IV - 2 - Le récit relatif à la première séance et son interprétation

*L'enseignante **P** applique l'ingénierie du groupe (CD) AMPERES, elle pose le problème aux élèves après avoir distribué la fiche d'exercices conçue dans le parcours de l'AER. L'enjeu de cette séance est la recherche du «programme de calcul» (tâche T1) pour calculer des expressions de la forme a + b - c en commençant par b > c et puis b < c tel que a, b et c sont des entiers naturels.*

> ***P** place les élèves dans un travail individuel. Elle passe dans les rangs et surveille leurs écrits. A la minute 5, elle propose de corriger le premier calcul. 3 minutes plus tard, après une interaction avec plusieurs élèves sur des ostensifs langagiers «additionner, ajouter, plus,», **P** annonce le «programme de calcul» qui facilitera le calcul mental et qui*

(1) Les séances sont transcrites en entier.

> *sera l'outil pour toutes les expressions qu'elle appelle «équations». Pour chaque expression corrigée, elle note au tableau le programme correspondant que les élèves notent dans leur cahier. Elle corrige plusieurs expressions, avant d'arriver au calcul de 347 + 61 - 62 à la min 20. Elle essaye par plusieurs régulations de transporter les élèves du secteur des entiers naturels au secteur des entiers relatifs. Les élèves, ignorants de ce secteur, proposent des réponses hors du domaine mathématiques ou faussement mathématiques afin de se retrouver croient-ils dans le même milieu que leur enseignante. Mais tous ces efforts sont perdus, la cloche a sonné et la recherche est remise au lendemain.*

Le parcours engage l'enseignante dans la quête d'un programme de calcul. Mais la tâche initiale qu'elle propose vise un «calcul mental» et situe donc les élèves dans le calcul arithmétique alors que les programmes de calcul sont le moyen d'entrer dans un raisonnement algébrique: un programme de calcul désigne un nombre parce qu'un ou plusieurs entrants sont donnés. Les élèves se sont lancés dans la recherche d'une réponse sans savoir l'enjeu. Cinq minutes plus tard, après avoir vu le travail de tous les élèves, **P** décide d'accélérer le temps didactique en corrigeant elle-même le calcul de la première expression 17 + 21 - 1.

12	**L**	Effectue mentalement les calculs suivants
13	**P**	Oui
14	**L**	17+21-1, c'est 17+20= 37
15	**P**	Comment tu as su? Qu'est-ce que tu as fait? Comment tu as réfléchi?
16	**L**	J'ai fait 21-1 c'est 20, après j'ai fait plus 17 (**M** lève le doigt)
17	**P**	Oui **M**
18	**M**	J'ai fait 17+21 c'est 38 moins 1 c'est 37 (**C** lève le doigt)
19	**C**	La même chose
20	**P**	Comme **M**?
21	**C**	Oui

L'ensemble classe travaille dans le domaine «Arithmétique», dans le secteur des «Nombres», au niveau du thème «Opérer» dans le sujet «Calcul mental», mais ne sont pas tous dans le même milieu. Cinq élèves pensent, comme **P** l'a voulu: «simplification de la question par le calcul de 21 - 1 en premier». **L**[(1)], une des cinq, se hâte pour donner sa réponse: «17 + 21 - 1, c'est 17 + 20 = 37» (TP 14) par un «calcul mental» qui est pour elle le sujet désigné par la consigne. Mais **L** ignorante du programme de calcul visé, répond aux attentes de **P** au niveau du sujet «calcul mental astucieux». Cette élève ainsi que ses camarades se réfère au milieu μ_1 «calcul de b - c» en premier, ignorant le programme de calcul visé et dont ils ont la tâche de retrouver tout le long de la séance. Par contre, les six autres élèves, proposent une réponse identique à celle de **M**: «J'ai fait 17 + 21 c'est 38 moins 1 c'est 37» (TP 18), ils ont réfléchi au niveau du sujet «calcul de gauche à droite».

Dans le but de pointer les éléments avec lesquels les élèves ont raisonné dans le milieu μ_1, **P** par ces questionnements à **L** «Comment tu as su? Qu'est-ce que tu as fait? Comment tu as réfléchi?» (TP 15), tente de montrer aux élèves l'enjeu tel qu'elle l'a imaginé pour eux: une manière de faire qui apparaisse comme une technique pour un type de tâches, avant même que les élèves n'aient pu éprouver le problème que ce type de tâches pose, puisqu'ils ne se sont affrontés qu'à une seule tâche. Elle lui demande la recherche d'un environnement technologique de la technique du «calcul astucieux» afin d'avancer, mais il est improbable que **L** ou un autre élève puisse répondre à sa demande. Car nous le comprendrons bientôt, les programmes de calcul n'ont, dans le premier temps de leur existence, qu'une forme de vie rhétorique: du type «ajouter 4 puis soustraire 5 (à un nombre)» qui est une interprétation nouvelle de l'écriture «n + 4 - 5».

42	**L**	J'ai fait les deux nombres qui se terminent la même chose
43	**P**	Comment?
44	**L**	J'ai fait les deux nombres qui se terminent le même chiffre
45	**P**	Oui d'accord, mais sans utiliser les termes plus et moins, qu'est-ce que tu as fait? Qu'est-ce que tu as fait avec ces deux nombres?

(1) Les lettres en gras représentent un ou une élève de la classe.

46	**L**	Soustrait
47	**P**	Tu as fait la soustraction, après
48	**L**	J'ai fait addition
49	**P**	Très bien, donc tu as à un nombre on ajoute un deuxième et on soustrait un troisième

L agit dans le thème «Opérer» au niveau du sujet «calcul astucieux». Elle explique son calcul en utilisant l'ostensif langagier et gestuel «faire» valable pour toute opération «J'ai fait 21 moins 1 c'est 20, après j'ai fait plus 17» (TP 16). Sa technique sollicite sa mémoire pratique des classes précédentes «J'ai fait les deux nombres qui se terminent par le même chiffre» (TP 44). **P** accepte cette manière *de faire*, mais pas *de dire*. Elle cherche à faire élaborer le programme de calcul, enjeu de cette séance, et pour évoquer les objets langagiers du milieu qu'elle pense, à juste raison, indispensable, elle demande «sans utiliser les termes plus et moins, qu'est-ce que tu as fait?»; «Qu'est-ce que tu as fait avec ces deux nombres?» (TP 45). **L** répond aux questionnements de **P** par le langage que, selon elle, cette dernière souhaite entendre «Soustrait», «J'ai fait addition» (TP 46 et 48).

Dans une dynamique interactive de construction de la référence, **L** et ses camarades tentent de contribuer à l'avancement du savoir, mais l'enseignante ne peut obtenir d'eux ce qu'elle espère. Elle est contrainte de dire elle-même le programme visé et annonce aux élèves qu'il est à noter dans le cahier: «ajouter 21 et soustraire 1 à un nombre revient à ajouter 20 à ce nombre», désignant ainsi implicitement 17 comme l'entrant variable du programme «ajouter 21 puis soustraire 1 (à un nombre)».

Dans la suite, nous relevons les conséquences néfastes de la formalisation qui produit μ_1, en préalable à la première proposition de remplacer le calcul de «ajouter 61 puis soustraire 62» par «soustraire 1», qui peut venir, par exemple, d'un élève s'écriant que «4374 plus 61 moins 62 c'est comme 4373 plus 7 moins 8 et 4373 plus 32 moins 31, soit 4373 moins 1» ce qui suppose qu'il ne soit pas dans le monde des opérations arithmétiques ajouter et soustraire mais dans celui des interprétations d'une écriture. On peut voir l'impasse dans les échanges ci-dessous:

211	**C**	4374 + 61-62. Là on ne peut pas faire 61 - 62, alors on est obligé de faire 4374 plus 61 égale 4435 moins 62 c'est 4373
212	**P**	Pourquoi tu ne peux pas faire 61-62?
213	**C**	Car 61 est plus petit que 62
214	**P**	Oui
215	**C**	Alors on ne peut pas la faire, on est obligé de faire 4374 + 61
216	**P**	D'accord. Oui **M**
217	**M**	J'ai fait 62 - 61 c'est 1 plus 4374
218	**P**	Est-ce que tu peux faire 62 - 61?
222	**P**	Donc qu'est-ce qu'on va faire ici?
223	**L**	Comme elle a dit **C**
224	**P**	Essayer de réfléchir à trouver quelque chose comme nous étions en train de faire. Attend un peu. Oui **B**
225	**B**	Si on fait 4374 moins 62 plus 61
226	**P**	4374 moins 62 plus 61 oui. Qu'est-ce que tu vas obtenir? Comment tu vas réfléchir? Quel est le programme que tu vas l'écrire?
227	**B**	Ajouter 4374 et soustraire 62 à un nombre revient à ajouter 61 à ce nombre
228	**P**	Ecris sur la feuille ce que tu as dit et dis-moi si tu vas obtenir le même résultat. Si tu vas ajouter 4374 puis soustraire 62 tu m'as dit, revient à ajouter 61? Et dis-moi si tu vas
253	**C**	Que dans on a 61 moins 62, on peut les inverser et on dit 62 moins 61 ça veut dire ça sera, ou on peut faire 4374 plus 62 moins 61 ou 62 moins 61 plus 4374?

Dans ces extraits **C** se rend compte de l'impossibilité de *manipuler* dans μ_1 les éléments de la question posée par **P**. Le calcul de b - c *avec b inférieur à c* est impossible, dans le domaine arithmétique. En réponse à la question de **P** «qu'est-ce qu'on va faire ici?» (TP 222). **L**, et peut être d'autres élèves qui ne se sont pas déclarés, répond: «Comme elle a dit **C**» (TP 223). Sachant que l'enseignante a en principe organisé μ_1 pour que les élèves y trouvent de quoi agir efficacement.

M, par son calcul «J'ai fait 62 moins 61 c'est 1 plus 4374» (TP 217), propose une transformation dont la vérification de conformité appartient à **P**, et lui renvoie la balle.

B agit de même et propose une autre transformation du calcul «Si on fait 4374 moins 62 plus 61»? (TP 226). Il se place dans le secteur des «Entiers naturels» pour opérer au niveau du sujet «calcul de gauche à droite». Mais **P** insiste à retrouver le programme de calcul opté. Elle demande de **B**, de **L**, de **C** et d'autres d'écrire leur calcul dans le but de les pousser à changer de position, mais ses efforts ont échoué. **C** propose de suivre **M** «on a 61 moins 62, on peut les inverser et on dit 62 moins 61 ça veut dire ça sera, ou on peut faire 4374 plus 62 moins 61 ou 62 moins 61 plus 4374?» (TP 253).

274	**M**	On fait $4374+61$ car 62 c'est plus grand que 61
275	**P**	Puis tu vas faire la soustraction, tu peux faire mais moi je veux de réfléchir comme nous étions en train de réfléchir avant. Essayer de trouver quelque chose pour trouver le resultat, sans faire l'addition de 4374 et 61. (**L** lève le doigt) Oui
276	**L**	Madame, on peut trouver 61-62?

Dans cet extrait nous retrouvons **M**, planté dans sa transformation, impossible pour lui de manipuler dans μ_1. **P** est en accord avec lui que ce calcul est bon, mais elle quête toujours le programme de calcul pour pouvoir introduire les nombres négatifs. **L**, comme tous ses camarades se pose la question sur la technique du calcul de + 61 - 62 et sur la technologie qui vient derrière. Le questionnement de L et d'autres élèves aussi nous laisse dire que pour eux la soustraction n'a de vie que dans le milieu des entiers naturels.

329	**H**	Madame on peut changer l'équation? On peut dire que 4364
330	**P**	4364?
331	**H**	Oui, +62-61
332	**P**	Tu veux dire que tu peux changer les opérations? L'addition en soustraction? Non.

Après cinq minutes de dialectique questions/réponses, nous retrouvons les élèves dans la même impasse. Ne pouvant pas accéder à la «dérive arithmétique», «ajouter 61 puis enlever 62 (à un nombre) revient à enlever 1 (à ce nombre)», **H** propose de «changer l'équation» (TP 329) pour opérer, par extension de ses connaissances antérieures, dans l'ensemble des entiers naturels.

La séance se termine sur ces propositions.

IV - 3 - Le récit relatif à la deuxième séance et son interprétation.

L'enjeu de cette séance est la tâche T_2: «exécuter le programme de calcul a + b - c (a, b et c entiers naturels; c > b» en comprenant a+ (b-c) comme «a moins la valeur de la différence entre b et c» ou «a moins (la différence c-b)» parce que «ajouter b puis soustraire c, est comme soustraire (c-b)».

> *A la minute 0, l'enseignante, pour réaliser la participation des élèves à l'enseignement, réactive leur mémoire didactique, en leur faisant revivre le problème à partir du calcul de 123 + 23 - 3. **C** se place dans le niveau de codétermination didactique relatif au domaine «Arithmétique» pour répondre partiellement aux attentes de **P** en donnant une réponse correcte mais il se trouve dans l'incapacité de verbaliser la production de cette réponse et donc dire le programme de calcul. **M** sauve la situation, en répétant le programme énoncé par **P** et en l'écrivant au tableau sous sa dictée.*
>
> *Deux minutes plus tard, **P** demande le programme de calcul de 2439 + 1139 - 139, et **B** répond à toutes ses attentes en adaptant l'énoncé précédent. A la quatrième minute, **P** dicte l'énoncé du programme de calcul puis elle passe à l'expression 4374 + 61 - 62, laissée sans réponse dans la*

première séance. ***MA*** *cause une rupture du contrat en donnant une réponse à la calculatrice, qui par contrat est interdite.* **L** propose d'ajouter 1, pour avoir (4374 + 1 + 61 - 62). Le débat autour du 1 dure 3min, et ***MA*** *se révolte contre ce 1 «D'où on a pris le 1?».* ***N*** *sauve la situation en disant qu'on va «ajouter 1 et soustraire 1 de 62».*

P *incite la classe à rechercher des éléments mathématiques nouveaux qui augmenteraient la rapidité de ce type de calcul, et pour cela à «Essayer de faire sortir le 62, essayer de créer des nouveaux nombres pour faire sortir le 62».*

A la min 10, ***C*** *propose le retrait de 1 de 4374 et l'ajout de 1 à 62.* ***P*** *lui cède le topos en l'invitant au tableau pour enseigner à l'ensemble classe sa technique.*

A la min 14, ***P*** *fait une nouvelle démonstration du même programme de calcul, et elle insiste sur la technique d'ajouter et de retrancher le même nombre «ce que je vais enlever, je dois l'ajouter pour avoir la même équation». Après 4 minutes de débat sur +1 et -1* ***MA*** *propose 4374 + 3 + 60 - 60 que* ***P*** *refuse pour des motifs que les élèves ignoreront. A la minute 20, par un jeu de questions/réponses,* ***P*** *arrive à faire dire le programme à* ***L****. Puis, elle le fait répéter par deux autres élèves, et demande à l'ensemble classe de le noter dans le cahier tout en l'écrivant au tableau (min 23). Elle enchaîne par une répétition du travail de* ***C****, pour parler du «Zéro» qui intervient mais qu'on ne voit pas dans la technique de* ***P*** *puisqu'elle écrit au tableau*

4374 + 61 - 62 = 4373+ 1 + 61 - 62 = 4373 + (1 + 61) - 62 = 4373 + 62 - 62 = 4373)»

Vers la minute 27, ***P*** *place les élèves dans un travail individuel. Par une négociation à la baisse et un long débat, elle institutionnalise le programme de calcul à la min 31 «écrire sous forme de symbole, qu'est-ce que ça veut dire soustraire 1?», pour passer à demander «écrire sous forme mathématique». Deux expressions sont travaillées avant la sonnerie.*

L'enseignante, comme toujours, s'est engagée dans une sollicitation de la mémoire pratique en situation. Elle reprend le travail de la première séance, en proposant deux expressions du type a + b - c avec b > c, afin de remettre en cause le programme de calcul de +61 - 62. Son but est d'étendre en l'adaptant la technique dite «d'emprunt», étudiée dans les petites classes pour la soustraction, sans se préoccuper de l'associativité qui ne figure plus dans le programme libanais.

Regardons dans ces extraits comment les élèves d'un côté et l'enseignante d'un autre côté co-construisent le milieu de référence pour leur technique.

53	**L**	On fait 4374 + 1 + 61 - 62
69	**MA**	D'où on a pris le 1?
70	**P**	Très bien, d'où tu as pris le 1? C'est la question. Si je te donne un nombre et j'ajoute 1 est-ce que je vais avoir le même résultat?

Se placer dans le milieu μ_1 est jusqu'à présent une impossibilité pour les élèves. **L** par sa proposition au TP 53, place l'ensemble classe et plus particulièrement **MA** dans une nouvelle impasse: le lieu du venant «1». **P** renvoie la balle aux élèves pour ajuster l'ajout du «1».

73	**H**	On ne peut pas enlever de 62 un? 61 - 61 = 0. 4374 +1 = 4375
74	**P**	Tu peux me donner le programme de calcul que tu as fait?
75	**H**	Non
76	**P**	Comment non?
77	**N**	Moi je peux dire comment, il y faut ajouter 1 et soustraire 1 de 62
78	**P**	Ajouter 1
79	**N**	Et soustraire 1 de 62
80	**P**	Et soustraire 1 de 62, oui
81	**N**	A ce nombre revient à ajouter, c'est 61 ajouter 1
82	**P**	Quel est le calcul?

H répond à **MA**, en proposant d'enlever 1 de 62. Mais, cette réponse ne cause aucun avancement du temps didactique, surtout qu'il lui est impossible de retrouver le programme de calcul correspondant dans le domaine arithmétique.

N sauve la situation au TP 77, et répond à la question de **MA**, mais lui aussi n'arrive pas à retrouver la notation correspondante à sa proposition.

101	**G**	On peut faire 61 + 4374 puis soustraire 62
102	**P**	Oui mais ici on veut trouver quelque chose qui est plus simple, on doit simplifier le programme de calcul pour pouvoir calculer mentalement avec rapidité, c'est plus long d'accord. Essayer de faire sortir le 62, essayer de créer des nouveaux nombres pour faire sortir le 62. (**N** lève le doigt) Oui **N**
103	**N**	Si on enlève 2 de 60 de 62 ça sera 60 après on fait 61 - 60 il reste 1 et on fait 4374 + 1 c'est 4375

Encore une fois, malgré les efforts de **P** de placer l'ensemble classe dans son milieu μ_1 et ressortir le programme de calcul de +61 - 62, nous retrouvons **G** avec la technique du calcul de gauche à droite. Le «oui» de P confirme la faisabilité de ce calcul qu'elle qualifie de long (TP 102), mais elle pousse les élèves à s'éloigner de cette technique, puisqu'elle n'est pas optimisée par l'ingénierie. Elle cherche un programme simplifié que les élèves ignorent. Elle se trouve dans la difficulté de restaurer le milieu μ_1 aux élèves, pour cela elle les dirige vers la recherche «des nouveaux nombres pour faire sortir le 62», comme si cette indication est la clé de la solution.

Au TP 103, **N** propose une transformation qui ne répond pas aux demandes de **P**. Il travaille toujours dans le domaine arithmétique. Il décompose 62 en 60 plus 2 pour pouvoir opérer dans l'ensemble des entiers naturels.

113	**C**	On peut prendre de 4374 un
114	**P**	Oui
115	**C**	Ça sera 4373
116	**P**	Passe écrire au tableau
117	**L**	Si on passe de gauche à droite

118	**P**	Je t'ai répondu avant
119	**L**	Oui (**C** passe au tableau)
120	**C**	On a pris 1 de 4374, on peut ajouter
121	**P**	Oui continue, travail puis on discute (**C** écrit sur le tableau: 4373-62 + 62) Explique à toute la classe ce que tu as fait
122	**C**	On avait 4374 on a pris de 4374 un ça sera 4373 on a ajouté pour 61 le 1 ça serait plus 62 moins 62 égale 4373
123	**P**	Vous êtes d'accord?
124	**H**	Oui
125	**L**	Oui
126	**A**	Non

Dans cet extrait, nous retrouvons **L** et **C** dans deux milieux différents avec une distance topogénétique très grande. Pendant que **C** propose la bonne solution qui émergera le programme de calcul attendu par **P**, et par suite ressortir les nombres négatifs, **L** se trouve toujours au niveau du sujet «calcul de gauche à droite» (TP 117), elle n'arrive pas à assumer la venue des nombres relatifs. **P** et l'ensemble classe sont en accord avec **C** «qui a fait ressortir le 62» par la décomposition de 4374 en 4373 + 1. Cet élève a pu étendre ses connaissances antérieures sur l'emprunt sans se préoccuper avec **P** de la possibilité de l'associativité pour la soustraction.

Ainsi **P** a trouvé une sortie à l'impasse, puisqu'elle a obtenu une démonstration du résultat, qu'elle suppose, correcte à partir de laquelle il devient possible de redonner «un programme qui, partant de 4373, donnerait 4373», programme qui est bien sûr «enlever 1». Encore faut-il le dire et le faire entendre de telle manière que l'on n'ait plus besoin de sa démonstration par le jeu avec la décomposition de 4374 en 4373 + 1. C'est ce qui se passe après la minute 31 lorsque la classe se décide à «écrire sous forme d'un symbole qu'est-ce que ça veut dire «soustraire 1»?», et qui est institué comme «une forme mathématique» soit, l'enjeu de l'enseignement des deux heures précédentes (TP 326).

326	**P**	Donc (**P** écrit au tableau et dit) Ajouter 61 et soustraire 62 à un nombre revient à soustraire 1 à ce nombre. Et si vous remarquez on n'a rien fait, on a seulement traduit ce qui était exprimé avec les symboles en des phrases avec des verbes d'action, j'ai ajouté 61 et soustraire 62 revient? Qu'est-ce qu'on a fait? Vous m'avez dit qu'on va faire la soustraction. Très bien maintenant la consigne suivante.

IV - 4 - Le récit relatif à la troisième séance et son interprétation.

L'enjeu de cette séance est encore la tâche T_2: «exécuter le programme de calcul a + b - c (a, b et c entiers naturels; c > b» en comprenant a+ (b-c) comme «a moins la valeur de la différence entre b et c» ou «a moins (la différence c-b)» parce que «ajouter b puis soustraire c, est comme soustraire (c-b).

*A la minute 0, l'enseignante cherche à réactiver la mémoire didactique des élèves par une reprise de l'exemple de la veille: 4374 + 61 - 62. **J** répond à ses attentes et donne une réponse conforme à la technique expliquée par **P** la veille 4374 + 61 - 62 = 4373+ 1 + 61 - 62 = 4373 + (1 + 61) - 62 = 4373 + 62 - 62 = 4373.*

***P** conclut: «Donc ici on a les deux méthodes qui sont justes. Ou bien on va écrire le programme de calcul qui pour «ajouter 61 et soustraire 62 à un nombre» dit que cela revient à «soustraire 1 à ce nombre», ou bien on décompose le 4374, donc le 4374 si je veux le décomposer ça va me donner 4373 plus 1 donc j'ai gardé le même nombre seulement je l'ai décomposé plus 61 moins 62» (TP 13).*

*Elle enchaîne son discours tout en écrivant au tableau 4374 + 61 - 62, pour poser la question «ça revient mathématiquement à quoi?» (TP 32). **L** se pose si elle doit dire «la phrase» et **P** insiste «mathématiquement». Les élèves se trouvent perdus entre le programme de calcul et le domaine arithmétique. **P** négocie à la baisse à la min 4 «si je vais faire cela mathématiquement qu'est-ce que je vais écrire, avec les plus et les moins, les nombres, qu'est-ce que je dois écrire?»*

*(TP 32). Aucun des élèves n'arrive à répondre à la question, et **P**, pour l'avancement du temps didactique, se trouve dans l'obligation de se répondre (TP 40). A la min 5 sec 16, l'enseignante cède le relais de la mésogenèse au groupe classe et c'est **N*** qui prend la responsabilité d'institutionnaliser le programme de calcul simplifié, puis ***P**, avant de placer les élèves dans un travail individuel pour travailler la consigne 3 de l'ingénierie, demande l'accord des élèves sur le programme simplifié.*

*La correction de la consigne 3 commence à la min 7 sec 30, par le calcul de 458 + 45 - 46. **B** fait ressortir le «zéro» au TP 93. Le débat autour du programme simplifié et de sa «traduction mathématique» (TP 122) dure à peu près 8 min. **MA** cause un arrêt du temps didactique, suite à la correction de deux autres expressions en disant à la min 33 sec 25 «Quand on a fait 7538 moins 7539 égal moins un je n'ai pas compris» (TP 209).*

*A la min 35, **P** passe aux exemples, comme + 34 - 37, pour faire acquérir aux élèves le programme de calcul simplifié. Mais la sonnerie de la cloche l'empêche de finir toutes les expressions. Elle demande aux élèves de les préparer pour vendredi (Signalons que cette séance est de 40 min).*

13	**P**	Donc ici on a les deux méthodes qui sont justes. Ou bien on va écrire le programme de calcul qui ajouter 61 et soustraire 62 à un nombre qui revient à soustraire 1 a ce nombre, ou bien on décompose le 4374, donc le 4374 si je veux le décomposer ça va me donner 4373 plus 1 donc j'ai gardé le même nombre seulement je l'ai décomposé plus 61 moins 62 et je continu. (**P** écrit au tableau) Donc ici si je vais réécrire les 4374+61-62 ça revient mathématiquement à quoi? Oui (**P** s'adresse à **L**)
14	**L**	Madame je dis la phrase?

15	**P**	Non pas la phrase, mathématiquement
16	**L**	4373
17	**P**	4373, c'est le résultat mais si tu vas traduire le programme mathématiquement, oui
18	**L**	4373 plus 1
19	**P**	Oui
20	**L**	Plus 62 moins 61
21	**M**	Non
22	**P**	Oui **M**
23	**M**	4373 plus 1 plus 61 moins 62
24	**P**	Après
25	**M**	Euuhh 4373 plus 61
26	**P**	D'accord mais ici quand est ce que j'ai fait en tout, vous m'avez dit le programme de calcul était quoi. (**Y** lève le doigt) Oui **Y**
27	**Y**	Ajouter 61
28	**P**	Oui
29	**Y**	Soustraire 62 revient à soustraire
30	**P**	Oui quel est ce nombre?
31	**Y**	4374
32	**P**	Très bien si je vais faire cela mathématiquement qu'est-ce que je vais écrire, avec les plus et les moins, les nombres, qu'est-ce que je dois écrire?
33	**Y**	4373
34	**P**	13 qu'est-ce que tu as ici?
35	**Y**	63
36	**P**	4000

37	**Y**	4374
38	**P**	Oui
39	**Y**	Moins
40	**P**	Ajouter 61 et soustraire 62 revient à soustraire 1 a ce nombre, le nombre que j'ai est? (**P** écrit au tableau) 4374. Si je vais soustraire 1, donc qu'est-ce que je vais écrire?
41	**Y**	4373
42	**P**	Oui, moins 1, c'est...?
43	**Y**	4373
44	**P**	4373, c'est clair? Qui veut ou peut répéter?
45	**L**	Quoi?
46	**P**	Cela
47	**C**	Ce qu'a fait J (Des élèves lèvent le doigt)
48	**P**	Oui oui ce qu'on a fait. Oui **N**
49	**N**	Si on veut trouver 4374 plus 61 moins 62, pour simplifier on fait 4374 moins 1, ça sera 4373, on écrit 4373 plus 1 plus 61 moins 62 et c'est 4373 plus 62 moins 62 égale 4373 ça veut dire que 4374 plus 61 moins 62 égale 4374 moins 1
50	**P**	Très bien donc si tu vas exprimer avec des phrases, quel est le programme de calcul que tu as?

Nous retrouvons dans cet extrait l'enseignante et les élèves dans un discours de sourds sur la notion et la notation (Serfati, 2005). **P** sait des choses que les élèves ignorent, elle ne peut pas dire directement ce que les élèves doivent savoir. Elle, qui suit l'ingénierie, s'est centrée dès la première séance sur des techniques de calcul, sans arriver à l'expression attendue et fondatrice de toute l'AER, *«ajouter 61 puis enlever 62 (à un nombre) revient à enlever 1 (à ce nombre)»*, expression qui déclare l'équivalence de deux programmes de calcul. La notation a perdu son sens avec **L** qui parle de l'ostensif «phrase» au TP 14. On peut décrire ce travail par un «agencement de milieu» (Sensevey et Quilio, 2002), dont les élèves devront éprouver les possibilités et les nécessités pour évoluer. **P** trouve la difficulté de construire ce milieu, pour s'en sortir, elle interagit par une dialectique questions/réponses pour jouer sur la notion et la notation du programme de calcul simplifié. **P** n'essaye pas d'adapter ses interventions au rapport des élèves à leur milieu. Au contraire, elle essaie par effet Topaze, de ressortir la notation mathématique du programme, afin de ressortir ce dernier au TP 50.

51	**N**	Ajouter euuhh ajouter 61 et soustraire 62, 62
52	**P**	Oui
53	**N**	Revient à ajouter euuhh revient à soustraire 1 à ce nombre
54	**P**	Vous êtes d'accord?
55	**EC**	Oui
56	**P**	Tout le monde est d'accord?
57	**EC**	Oui

Dans cet extrait, nous percevons que l'interaction didactique a abouti à ses fins. Elèves et enseignante sont convaincus par le résultat. Tout le monde est «d'accord», tout le monde est heureux.

Le reste de la séance tourne autour des applications sur le programme simplifié, qui dans la séance quatre mettra en évidence la notation «-1» de «soustraire 1». Cette notation sera le pont pour introduire les nombres négatifs et par suite les nombres relatifs.

V - Conclusion

L'ensemble de ces analyses nous a permis de relever les difficultés au fil des interactions, enseignante et élèves dans l'élaboration du milieu pour l'étude. Nous avons montré comment l'attention portée par l'enseignante au contenu de l'ingénierie lui a provoqué des difficultés même langagières des savoirs en jeu. Elle a peiné pour centrer les élèves sur l'enjeu des séances. Nous pouvons dire alors, que les choix épistémologiques des auteurs de l'ingénierie ne sont pas partagés par l'enseignante qui s'en empare «pour voir», et que cela ne lui permet pas de prendre les décisions attendues. Ces choix tiennent en effet à l'idée, venue par exemple du travail de Serfati (2005) sur «la Révolution symbolique, de Descartes à Leibniz», selon laquelle les écritures symboliques peuvent précéder la construction d'un système d'interprétations, comme ici où le signe «nombre précédé d'un signe -» va devenir la notation d'un «nombre négatif» que l'on pourra apprendre à ajouter ou soustraire formellement avant d'imaginer un sens possible à ces opérations. Cette pratique que Chevallard (1991) et Matheron (2009) appelle «une extension praxémique»(1), qui est une «unité de la pratique» à l'intérieur d'un bloc pratico-technique constitué d'un type de tâches et d'une technique, n'est manifestement pas connue du professeur, qui n'engage pas ses élèves sur cette voie en développant une démonstration du résultat *avant* d'accepter la notation.

Cette étude peut mettre en cause aussi bien le contexte des systèmes de formation, que l'ingénierie qui poursuit ce qu'on pourrait appeler la «dérive arithmétique» engagée par les objets ostensifs mis en jeu dans les pratiques enseignantes.

(1) Le terme praxémique est proposé de *praxème* pour désigner les unités ostensives minimales d'un système d'objets engagés dans une praxéologie déterminée. Le substantif *praxème* importe les notions de pratique et de sens. « Extension praxémique » est le phénomène qui permet d'étendre des techniques connues, parfois de manière indue au regard du savoir, pour pouvoir les utiliser dans la résolution de tâches nouvelles.

Bibliographie

1. Abou Raad N. (2014). Dynamiser l'étude des mathématiques dans le contexte libanais: mise en place des séquences d'enseignement organisées autour d'activité d'étude et de recherche (AER) sur les nombres relatifs en EB6. **Aleph-ya.**
2. Amade-Escot C. & Venturini P. (2009). Le milieu didactique: d'une étude empirique en contexte difficile à une réflexion sur le concept. **Éducation & Didactique**, vol. III, n 1, pp. 7-43.
3. Bosh M. et Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. **Recherche en didactique des mathématiques**. v.19, n°1, pp. 77 - 124.
4. Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes en didactique des mathématiques. **Recherches en didactiques des mathématiques**. v.7, n° 2, pp.33-115.
5. Brousseau G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.9, n° 3, pp.309-336.
6. Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. **Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble**, Université Joseph-Fourier.
7. Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en didactique des mathématiques**, v.12, n°1, pp.73? 112.
8. Chevallard Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In Noirfalise R., éd. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: acte de l'Université d'été de la Rochelle. Ed **IREM de Clermont-Ferrand**.
9. Chevallard Y. (2002). Les praxéologies didactiques; Organiser l'étude. Cours n°1: Structures et fonction. Cours n°3: écologie et régulations in

Dorier J.L et al: **Actes de la 11ème école d'été de Didactique des mathématiques**, Grenoble, La Pensée sauvage.

10. Chevallard Y. (2004). **La places des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire**, communication à la 3ème Université Animath, Saint Flour (Cantal), pp.22-27 août 2004.
11. Chevallard Y. (2005). **La didactique dans la cité avec les autres sciences**. Journées 2005 du Réseau Education Formation, Montpellier.
12. Comiti C., Grenier D., & Margolinas C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classes et modélisation de phénomènes didactiques. In Arsac et al. (Eds.), **Différents types de savoirs et leur articulation**, pp. 92-113. Grenoble: La Pensée sauvage.
13. Kazan E. (2014). **Etude du phénomène didactique: Le dédoublement des milieux dans l'enseignement ordinaire et dans des ingénieries**. Thèse de doctorat, Aix Marseille Université.
14. Leutenegger, F. (2000). **Construction d'une clinique» pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement, Recherches en didactique des mathématiques**, v.20, n° 2, pp. 209-250. La Pensée Sauvage, Grenoble.
15. Margolinas C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), **Les débats de didactique des mathématiques**. pp. 89-102. Grenoble: la pensée sauvage.
16. Margolinas C. (1999). Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse des situations d'enseignement. In R. Noirfalise (Ed.), Analyse de pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, **Actes de l'université d'été de La Rochelle**, pp. 3-16. Clermont-Ferrand: IREM.
17. Perrin-Glorian M-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants, In C. Margolinas & al. (Ed), **En amont et en aval des ingénieries didactiques**, pp.57-78. Grenoble: La Pensée Sauvage éditions.
18. Salin M.H. (2002). Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.). **Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques**, pp. 111-124. Grenoble: La pensée Sauvage.

19. Schubauer-Leoni, M.-L., Leutenegger, F., Ligozat, F., & Fluckiger, A. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves: les phénomènes didactiques qu'il peut/doit traiter. In G. Sensevy, & A. Mercier (Eds.), **Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves**, pp. 51-91. Rennes: Presses Universitaires de Rennes.

20. Serfati M. (2005). **La révolution symbolique: La constitution de l'écriture symbolique mathématique**. Editions PETRA.

21. Sensevey G., Mercier A., Schaubauer-Leoni M.L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la course à 20. **Recherches en didactiques des mathématiques**, v.20, n^{o} 3, pp. 264 - 301.

22. Sensevey G. & Quilio S. (2002). Les discours du professeur. Vers une pragmatique didactique. In **Revue française de pédagogie**. Volume 141. Vers une didactique comparée, pp.47-56.

23. Sensevey G., Mercier A., Schaubauer-Leoni M.L & Perrot G. (2005). An attempt to model the teacher's action in mathematics. In **Educational Studies in Mathematics**, v.59, n^{o} 1, pp 153-181.

24. Sensevy G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G. Sensevy, & A. Mercier (Eds.), **Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves**, pp. 13-49. Rennes: Presses Universitaires de Rennes.

25. Matheron, Y. (2009). **Mémoire et étude des mathématiques, une approche didactique à caractère anthropologique**. Rennes: Presses Universitaires de Rennes.