دراسة طبيعة البرهان الرياضي لدى الطلاب المعلمين بكلية التربية– جامعة جازان

إعـــــداد

د/ علي بن عبدالله العنزي

أستاذ المناهج وطرق تدريس الرياضيات المساعد

كلية التربية– جامعة جازان

دراسة طبيعة البرهان الرياضي لدى الطلاب المعلمين بكلية التربية- جامعة جازان

د/ علي بن عبدالله العنزي[*]

الملخص:

هدفت الدراسة إلى فهم طبيعة البرهان الرياضي المستخدم في إثبات صحة عملية ضرب غير تقليدية من قبل الطلاب المعلمين بكلية التربية في جامعة جازان. تكونت عينة الدراسة من ٢٩ طالباً معلماً كانوا يدرسون مقرر الرياضيات لمعلمي التربية الخاصة أثناء إجراء الدراسةحيث تم اختيارهم بأسلوب العينة الملائمة (Convenience Sampling) لتحقيق هدف الدراسة. تم جمع البيانات المطلوبة وتحليلها من: (١) أوراق إجابات الطلاب المعلمين وتقاريرهم المكتوبة لتوضيح "ماذا" استخدموا من حلول للوصول للبرهان الصحيح و"كيف" استخدموها، و(٢) مقابلات شخصية شبه مقننة باستخدام نمط مجموعة الحوار المركزة لتوضيح "لماذا" رأى الطلاب المعلمون ملائمة نوع الحل المستخدم لإثبات صحة عملية الضرب غير التقليدية، بالإضافة لمعرفة الصعوبات التي واجهها الطلاب المعلمون أثناء عملية الحل. وقد اظهرت النتائج أن أغلب الطلاب المعلمين لديهم قصورًا في فهم أفكار البرهان الرياضي وتطبيقاته بشكل عام والبرهان الجبري بشكل خاص، وتشمل الدراسة على مناقشة تفصيلية لطبيعة البرهان الرياضي لدى الطلاب المعلمين المشاركين في الدراسة وكذلك توصيات ومقترحات لعلاج القصور لديهم.

[*] **د/ علي بن عبدالله العنزي:** أستاذ المناهج وطرق تدريس الرياضيات المساعد- كلية التربية- جامعة جازان.

المقدمة:

امتلاك الطالب لمهارات تفكير ملائمة أصبح ضرورة ملحة، حتى يتمكن من التعايش في مجتمع معقد ومتغير بشكل متسارع. وبما أن الرياضيات من المواد التي تدعم تنمية مهارات التفكير بشكل أساسي وذلك لطبيعتها الاستقرائية والاستدلالية، أصبحت الرياضيات جزءاً أساسياً في عملية التعليم والتعلم بصفتها أداةً تساعد في نقل الطالب من كونه متلقياً للمعرفة إلى مشارك ومنتج لها، وتمكنه من نقد وفهم ما حوله مما يسهم في تحسين حياته العلمية والعملية، حيث أشار (Ernest, 2010) إلى أن الهدف من تدريس الرياضيات ومهارات تفكيرها هو تزويد الطالب بقدرات معينة في ثلاث مجالات وهي الرياضيات الأساسية (قدرات تسهم في التوظيف وتنمية الاقتصاد)، والرياضيات الشخصية والاجتماعية (قدرات تسهم في معالجة القضايا الشخصية وتطوير الحياة الاجتماعية)، وتقدير الرياضيات كجزء من الثقافة (قدرات تسهم في تقدير دور الرياضيات في مختلف نواحي الحياة في الماضي والحاضر والمستقبل).

ويُعد البرهان الرياضي من أهم مهارات التفكير في فروع الرياضيات المختلفة حيث يُساعد الطالب على الفهم العميق للمشكلات والتوصل لحلها عن طريق "اشتقاق نتائج صادقة من مقدمات معطاة مُسلّم بصدقها، وذلك عن طريق إتباع خطوات استدلالية تحكمها قوانين المنطق"(الخطيب، ٢٠١٢، ٨١). ويُسهم تدريس البرهان الرياضي بشكل متقن وصحيح إلى إكساب الطالب أساليب متنوعة من التفكير تدعمه في اكتشاف الجديد وتغرس دافعية تعلم المزيد مما ينعكس إيجابياً على قدرته في التعامل مع مستويات أعلى في مادة الرياضيات أو حتى مواد أخرى وكذلك معالجة قضايا الحياة اليومية. ونتيجة لهذا الدور المهم الذي يلعبه البرهان الرياضي في عمليتي التعليم والتعلم فقد حظِيَ باهتمام كبير في أوساط صانعي السياسة التربوية وخصوصاً في مجتمع تعليم وتعلم الرياضيات. في الولايات المتحدة الأمريكية، على سبيل المثال، تم التوجه في السنوات الأخيرة لإدراج البرهان الرياضي كجزءٍ لا يتجزأ من منهج الرياضيات ليس فقط في المرحلة الثانوية وإنّما في جميع المراحل الدراسية (المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات الأمريكي National Council of Teacher of Mathematics- NCTM، ٢٠٠٠؛ مجلس رؤساء المدارس الحكومية الأمريكي Council of Chief State School Officers- CCSSO،٢٠١٠). وحتى يتم تعليم البرهان

الرياضي في المدراس بشكل متقن وصحيح يؤدي إلى النتائج المنشودة، يستلزم على المعلمين امتلاك المعرفة الكاملة والفهم العميق للبرهان الرياضي وكيفية تدريسه.

مشكلة الدراسة:

أشارت بعض الدراسات إلى أن كثيراً من المعلمين يُظهرون فهماً غير كاف أو غير صحيح للأفكار المتعلقة بالإثبات الرياضي وأدواره وتطبيقاته المختلفة في الرياضيات (Knuth, 2002). ولمعالجة هذه الصعوبات المتعلقة بالبرهان الرياضي لدى المعلمين، فقد صُمِّمَت مقررات في برامج إعداد المعلم موجهة نحو تطوير البرهان الرياضي وتطبيقاته وكيفية تدريسه للطلاب المعلمين حتى يصبحوا معلمين متمكنين في مجال البرهان الرياضي ويمتلكوا القدرة على تعليمه لطلابهم بالشكل الصحيح في المستقبل. ولكن للأسف، اتضح بعد عقود من التطبيق أن محتوى هذه المقررات غير فعّال بالشكل المنشود حيث ركّز المحتوى على ترسيخ مبادئ البرهان الأساسية بشكل روتيني بدون إعطاء الفرصة الكافية لاكتشاف الجديد، حيث مازالت الدراسات تشير إلى وجود قصور لدى المعلمين وكذلك الطلاب المعلمين في تطبيق البرهان الرياضي (Stylianides et al. ,2007؛ أبو عقيل، ٢٠١٥). وعليه، يرى (Zaslavsky& Sullivan, 2011، الصافي، ٢٠١٥) أن من أفضل الطرق لفهم أبعاد هذا القصور واقتراح خطط ملائمة لمعالجته بشكل فعّال وسريع هي إشراك الطلاب المعلمين باستمرار في أنشطة برهان رياضي تطبيقية نوعية تحمل طبيعة الشّك وتدعو للتفكير والتخمين والابتكار، حيث إن إشراك الطلاب المعلمين في مثل هذه الأنشطة التعليمية يحقق عدة فوائد منها:

١- اكتشاف الصعوبات الحقيقية التي يواجهها الطلاب المعلمون في البرهان الرياضي مما يتيح الفرصة لاقتراح حلول مناسبة لها من قبل المختصين.
٢- ممارسة الطلاب المعلمين لأنشطة تعليمية جديدة تنمي من مهارتهم في التعامل مع التركيبات الأساسية وكذلك المعقدة لأفكار البرهان الرياضي.
٣- تفهّم الطلاب المعلمين لصعوبات التعامل مع البرهان الرياضي من منظور المتعلم، مم يمنحهم الفرصة لتعليم طلابهم في المستقبل بشكل مثمر.

وقد قام عدد من الباحثين باستخدام أنشطة برهان رياضي تطبيقية نوعية لدراسة هذه المشكلة وحققوا نجاحات في طرح بعض الحلول المثمرة في تنمية مهارة البرهان الرياضي (Sears, Mueller-Hill &Karadeniz, 2013; Stavrou, 2014; Zeybek, 2017). رغم ذلك، مازالت هناك حاجة لدراسة المشكلة باستخدام أنشطة أخرى مختلفة. لهذا، تسعى هذهالدراسة لتقديم إضافة علمية في مجال البرهان الرياضي عن طريق تقديم الفرصة للطلاب المعلمين للانخراط في نشاط علمي مختلف عما تم استخدامه في الدراسات السابقة. هذا النشاط العلمي تم اختياره ليساعد في فهم طبيعة البرهان الرياضي المقدم من قبل الطلاب المعلمينوذلك عند تحليلهم وتفسيرهم لعملية ضرب غير تقليدية (خدعة ضرب رقمية Multiplication Trick) حيث تُعرّف خدعة الضرب الرقمية بأنها عملية تلاعب بالأرقام للحصول على إجابة سريعة لعملية الضرب في مدة لا تتجاوز خمس ثوانٍ دون القيام بأي حسابات ذهنية أو كتابية معقدة. بمعنى آخر، سيعمل هذا النشاط العلمي على تحديد طبيعة البرهان الرياضي عن طريق معرفة النجاحات التي يحققونها في إثبات صحة خدعة الضرب الرقمية أو التحديات التي يواجهونها عند عدم القدرة على إثبات الصحة.

هدف الدراسة:

هدفت هذه الدراسة إلى فهم طبيعة البرهان الرياضي الذي يمتلكه الطلاب المعلمون، وذلك عن طريق دراسة مدى قدرتهم على تقديم برهان رياضي لتفسير عملية ضرب غير تقليدية (خدعة ضرب رقمية). في حالة تقديم برهان صحيح، يتم الحصول على معلومات تفيد بنوعية الحل (ماذا استخدم) وإجراءاته (كيف استخدمه) والأسباب التي تجعل نوع الحل المستخدم ملائماً لتفسير خدعة الضرب الرقمية بشكل صحيح (لماذا استخدمه). في حالة تقديم برهان خاطئ أو عدم تقديم برهان، يتم الحصول على معلومات تفيد بطبيعة الصعوبات التي أدّت إلى هذا الفشل.

أسئلة الدراسة:

للدراسة سؤال رئيس هو:

ما طبيعة البرهان الرياضي المستخدم من قبل الطلاب المعلمين في تفسير خدعة ضرب رقمية؟

ويتفرع منه الأسئلة التالية:

١- ما أنواع الحلول التي يستخدمها الطلاب المعلمون في إثبات صحة خدعة ضرب رقمية؟

٢- ما إجراءات الحلول التي يستخدمها الطلاب المعلمون في إثبات صحة خدعة ضرب رقمية؟

٣- ما الأسباب التي تدعو الطلاب المعلمين لتفضيل نوع حل أو أنواع حلول معينة في إثباتصحة خدعة ضرب رقمية؟

٤- ما الصعوبات التي قد يواجهها الطلاب المعلمونفي إثبات صحة خدعة ضرب رقمية؟

أهمية الدراسة:

قد تفيد الدراسة الجهات التالية:

١- الطلاب المعلمون وذلك عن طريق:

- تعرف نشاط تعليمي جديد ينمي مهاراتهم في التعامل مع التركيبات الأساسية وكذلك المعقدة لأفكار البرهان الرياضي.
- التمكن من تقدير التحديات في بناء البرهان الرياضي من منظور المتعلم ممّا يساعدهم في فهم الطلاب واختيار الطرق المناسبة لتعليمهم.

٢- الباحثون مجال المناهج وطرق تدريس الرياضيات:

- الحصول على إضافة علمية تزيد من أدراكهم لطبيعة النجاحات والتحديات التي يواجهها الطلاب المعلمون في البرهان الرياضي، وقد تزودهم توصيات ومقترحات الدراسة بأفكار لبحوث ودراسات مستقبلية.

٣- القائمون على برامج إعداد المعلم:

- الحصول على معلومات علمية يمكن الاستفادة منها عند تصميم مقررات موجهة نحو تطوير مفاهيم البرهان الرياضي للطلاب المعلمين.

حدود الدراسة:

اقتصرت الدراسة الحالية علي:

- طلاب بكالوريوس التربية الخاصة بكلية التربية جامعة جازان والذين يدرسون مقرر الرياضيات لمعلمي التربية الخاصة ٢ وقد كان جميع أفراد العينة كانت بخلفية علمية حيث تخرجوا من القسم العلمي في مرحلة الثانوية العامة. وقد اقتصرت الدراسة على طلاب التربية في تخصص التربية الخاصة دون

التخصصات الأخرى المتاحة في كلية التربية (التربية البدنية والتربية الفنية) كونهم الوحيدون الذين يدرسون مقررات في مادة الرياضيات وستتاح لهم الفرصة لتدريسها بعد تخرجهم مستقبلاً.

- الفصل الدراسي الأول من العام الجامعي١٤٣٩/١٤٤٠هـ الموافق ٢٠١٨/ ٢٠١٩م.

مصطلحات الدراسة:

١- **البرهان الرياضي:** يعرفه الباحث إجرائيا بأنه عبارة عن تعليل منطقي لصحة عبارة رياضية أو علاقة رياضية بالاستناد إلى مجموعة من البديهيات.

الإطار النظري والدراسات السابقة:

أولاً- البرهان الرياضي:

١- تعريف البرهان الرياضي:

يُعرَّف البرهان الرياضي بأنه عملية تهدف بشكل أساسي لإثبات أو تبرير صحة عبارة أو علاقة رياضية ما (Ball & Bass, 2000).

٢- دور البرهان الرياضي:

ويتمثل دور البرهان الرياضي في:

- التحقق من صحة عبارة ما.
- تعليل سبب صحة عبارة ما.
- توصيل معرفة رياضية.
- اكتشاف أو بناء معرفة رياضية جديدة.
- تنظيم البيانات في نظام بديهي.

(Bell, 1976;de Villiers, 1999; Hanna, 1983; Hanna 1990; Schoenfeld, 1994, Knuth, 2002).

٣- مهارات البرهان الرياضي:

تُعرف مهارات البرهان الرياضي بقدرة المتعلمعلى فهم عناصر العبارة أو العلاقة الرياضية (المعطيات) ودراستها بشكل كاف، ووضع خطة لإثبات صحة العبارة أو العلاقة الرياضية (كيفية توظيف النظريات والقوانين والحقائق المعروفة لدى المتعلم مسبقاً وربطها بالمعطيات)، ومن ثم يقوم بتنفيذ الخطة للحصول على البرهان بطريقة صحيحة والتأكد من صحته، بمعنى آخر، هي قدرة المتعلم على

استخدام خطوات البرهان الرياضي بشكل منظم وفاعل والتي تتمثل بشكل رئيسي بما يلي:

- دراسة مكونات العبارة أو العلاقة الرياضية.
- ربط مكونات العبارة/العلاقة وتحليل العلاقة بينهم.
- إصدار حكم على صحة العبارة/العلاقة أو عدمها.
- تقديم تعليل منطقي على صحة العبارة/العلاقة أو عدمها. (الخطيب، ٢٠١٢)

٤– أنواع البرهان الرياضي:

للبرهان الرياضي على الأقل نوعان رئيسيان هما: البرهان الهندسي وهو عبارة عن برهنة الجمل الرياضية الخاصة بالأشكال الهندسية، والبرهان الجبري وهو عبارة عن برهنة الجمل الرياضية الخاصة بالأعداد الطبيعية وهو محوررئيسي في هذاالبحث. ويعرّف البرهان الجبري أيضابأنه سلسلة من العبارات الجبرية، حيث تستخدم الخصائص الجبرية للأعداد الحقيقية والتبريرات للانتقال من كل عبارة إلى العبارة التي تليها.

وهناك خصائص للأعداد الحقيقية يمكن الاستفادة منها عند القيام بحل المعادلات، وتمكن من تبرير العبارات وإثبات البراهين بشكل منطقي منها:

- خاصية الجمع للمساواة: عند إضافة نفس القيمة لطرفي معادلة يبقى الطرفان متساويين.
- خاصية الطرح للمساواة: عند طرح نفس القيمة من طرفي معادلة يبقى الطرفان متساويين.
- خاصية الضرب للمساواة: عند ضرب نفس القيمة في طرفي معادلة يبقىالطرفان متساويين.
- خاصية القسمة للمساواة: عند قسمة طرفي المعادلة على نفس القيمة يبقى الطرفان متساويين.
- خاصية التعدي للمساواة: إذا كان عددان مساويان لرقم فان العددين متساويان.

٥– أساليب البرهان الرياضي

من أساليب البرهان الرياضي الأساسيةالتي تستخدم في جميع أنواع البرهان الرياضي:

- الاستقراء وهو عملية الانتقال من الجزء للكل ويمثل دراسة مجموعة من الحالات الجزئية لإصدار حكماً عاماً ينطبق على كل الحالات، أو هو الحكم بصحة قاعدة ما إذا صح تطبيقها على جميع الأمثلة.
- الاستنتاج وهو عملية الانتقال من مقدمات معلومة إلى نتائج جديدة بيتم التوصل لهل باستخدام قواعد المنطق.
- المنهج العلمي وهو خليط ما بين الأسلوب الاستقرائي والاستنتاجي ويشمل، على سبيل المثال لا الحصر، البرهان المباشر (استخدام المعطيات المتاحة والبناء عليها من أجل الوصول إلى المطلوب اثبات) والبرهان بالتناقض (البداية بنفي المطلوب للحصول على تناقض) والبرهان بالمثال المضاد (برهنة عدم صواب عبارة بإعطاء مثال مضاد للعبارة. (التميمي، ٢٠١٦)

ثانياً– طبيعة البرهان الرياضي:

١– طبيعة البرهان الرياضي لدى المعلمين:

أظهرت الدراسات السابقة أن المعلمين لديهم فِهم غير كاف أو غير صحيح للأفكار المتعلقة بالإثبات الرياضي وأدواره المختلفة في الرياضيات، فقد قام (Knuth, 2002) بدراسة نوعية لفهم مدى قدرة ١٧ معلماً لمادة الرياضيات في المرحلة الثانوية على التكيف مع خطة الإصلاح التربوي في الولايات المتحدة الأمريكية في مادة الرياضيات والتي دعت إلى تغيير جذري في عملية تعليم وتعلم البرهان الرياضي، بحيث أكدت الخطة على تزويد جميع طلاب الثانوية بدون استثناء في كل الصفوف وطوال المرحلة بفرص وخبرات غنية في البرهان الرياضي. وبعد مقابلات شخصية شبه مقننة سعت لفهم عميق لأفكار المعلمين المتعلقة بالإثبات الرياضي وأدواره المختلفة وطبيعة البرهان الرياضي الذي يتوقعونه من طلابهم، وجد الباحث أن هؤلاء المعلمين لديهم نظرة محدودة تجاه البرهان الرياضي حيث يعتبرونه موضوعاً تقليدياً لا يعدو كونه أحد العناصر المكونة لمادة الرياضيات (حقائق الضرب على سبيل المثال) وليس أداةً للتفكير وتحليل المعرفة الرياضية، وإنتاج معرفة رياضية جديدة وتوصيلها، وتوقع الباحث في نهاية الدراسة أن هؤلاء المعلمين سيواجهون تحديات وصعوبات عند تطبيق خطة الإصلاح التربوي الخاصة في البرهان الرياضي.

وفي دراسة أخرى قام (Barkai and Others, 2002) بدراسة طبيعة البرهان الرياضي المستخدم من قبل ٢٧ معلماً لمادة الرياضيات في المرحلة الابتدائية لتفسير مجموعة من الفرضيات الرياضة لنظرية الأعداد (مثال: مجموع أي خمسة أعداد صحيحة متتابعة يقبل القسمة على خمسة)، حيث طُلب منهم ١) أن يقرروا ما إذا كانت الفرضية صحيحة أو لا، و٢) تقديم تبرير لصحة أو عدم صحة الفرضية، و٣) التحديد من وجهة نظرهم الخاصة ما إذا كان تبريهم المقدم يُعد برهاناً رياضياً. وقد أظهرت النتائج أن نصف المعلمين قدموا حلولاً جبرية منظمة تحمل طابع الرسمية وتناسب تدريس مراحل أعلى من المرحلة الابتدائية وعدد آخر قليل قدم حلولاً غير رسمية تناسب التدريس في المرحلة الابتدائية. رغم ذلك، الأغلبية استخدموا إجراءات غير كافية لإثبات صحة الفرضيات أو عدم صحتها وكذلك كان لديهم عدم يقين ما إذا كانت الإجراءات التي استخدموها تمثل برهاناً رياضياً.

وقد قام (الجوعاني ومحمد، ٢٠١٣) بتطبيق اختبار لقياس مهارات البرهان الرياضي تكون من ١٤ فقرة على عينة مكونة من ٢١٧ طالباً و١٦٠ طالبةبمجموع ٣٧٧ من طلبة الصف الثالث المتوسط بهدف: (١) تعرف مهارات البرهان الرياضي التي يمتلكها طلبة الصف الثالث المتوسط، و(٢) ما إذا كان هناك فروق ذات دلالة إحصائية في اختبار مهارات البرهان الرياضي بحسب متغير النوع. ومع أن النتائج أظهرت وجود فروق ذو دلالة احصائية عند مستوى دلالة (٠.٠٥) بين أداء الطلاب والطالبات في اختبار مهارات البرهان الرياضي لصالح الطالبات إلّا أن الدراسة أكّدت على وجود ضعف في مهارات البرهان الرياضي عند كلٍ من الطلاب والطالبات، وقد عزت الضعف إلى عدة أسباب من أهمها عدم تمكن بعض المعلمين من مهارات البرهان الرياضي وهذا ما انعكس على عدم قدرتهم على نقلها وتدريسها لطلبتهم بالشكل الصحيح، وكذلك استخدام هؤلاء المعلمين لأساليب تدريس تقليدية يكون فيها الطالب متلقياً للمعلومة دون المشاركة في إنتاجها، وابتعادهم عن استخدام أساليب تنمي التفكير المنطقي أو تطبيق الأسلوب الاستدلالي أو الاستنتاجي للوصول إلى المطلوب وإقناع الآخر بصحته.

وهدفت دراسة (أبو عقيل، ٢٠١٥) إلى معرفة طبيعة معوقات تدريس البراهين الرياضية في المرحلة الأساسية العليا والتي تخص كلّاً من الطالب والمنهج المدرسي والمعلم وذلك من وجهة نظر١٦٤معلماً ومعلمة لمادة الرياضيات، وقد أظهرت النتائج أنأهم معوقات تدريس البراهين الرياضية لدى الطلاب تمثلت في: عدم قدرة الطلبة على البدء بالبرهان، وعدم قدرة الطالب على تبرير كل خطوات البرهان، وصعوبة في استخدام اللغة الرياضية، صعوبة في كتابة البرهان الرياضي، وعدم امتلاك المعرفة الكافية للمفاهيم والنظريات الرياضية المساندة للإثبات، وعدم وجود اهتمامات كبيرة نحو البراهين. أما بخصوص المنهج المدرسي فتمثلت أهم المعوقات في: الكثير من البراهين لا تعني شيء للطالب، والبراهين المكتوبة لا تثير اهتمام الطلبة ولا تحفز فيهم التحدي الفكري واستكشاف الجديد. وأما بخصوص المعلم فتمثلت أهم المعوقات في: عدم وجود المعرفة الكاملة لدى المعلم بطرق البرهان الرياضي وأنواعه، وعدم استخدام وسائل محببة وفعالة في غرس مفاهيم البرهان الرياضي مثل استراتيجية التدريس الحلزوني، وعدم تقديم أفكار كاملة عن البرهان الرياضي قبل شرحه، وعدم كتابة البرهان الرياضي بلغة واضحة، وعدم إشارة المعلم لبداية البرهان ونهايته. وقد أوصى الباحث بخصوص المعلم أن يتم عقد دورات تدريبية للمعلمين لتزويدهم بكافة أنواع البرهان الرياضي وأساليبه وطرق تدريسه.

٢- طبيعة البرهان الرياضي لدى الطلاب المعلمين:

أظهرت الدراسات السابقة أن الطلاب المعلمين أيضاً لديهم صعوبات متعلقة بالإثبات الرياضي وأدواره المختلفة في الرياضيات، حيث قام (Stylianides et al., 2007) بدراسة طبيعة البرهان الرياضي المستخدم من قبل ٩٥ طالباً معلماً لمادة الرياضيات في المرحلة الابتدائية والمتوسطة عن طريق (١) تحليل إجاباتهم في اختبار شمل على طرق مختلفة للإثبات كالإثبات بالتناقض والمثال المضاد والاستقراء الرياضي و(٢) مقابلات شخصية شبة مقننة مع ١١ طالباً معلماً من ضمن عينة الدراسة. نتائج الدراسة أظهرت أن الطلاب المعلمين للمرحلة الثانوية كانوا أكثر نجاحاً في الحصول على إجابات صحيحة من الطلاب المعلمين للمرحلة الابتدائية ورغم ذلك واجه طلاب من كلا المجموعتين صعوبات مشتركة عند البرهان باستخدام الاستقراء الرياضي.

وقام كل من (Sears, Mueller-Hill&Karadeniz, 2013) بدراسة نوعية على ١٢ طالباً معلماً للمرحلة المتوسطة لمعرفة آرائهم في مدى دعم برنامج إعداد المعلم لقدرتهم على تدريس البرهان الرياضي بشكل فعّال، وقد تمت الدراسة لمدة فصل دراسي واحد خلال مقرر "طرق تدريس الرياضيات المرحلة المتوسطة" حيث طلب منهم: (١) قراءة بحوث في البرهان الرياضي وتلخيصها، (٢) كتابة إطار نظري ودراسات سابقة في البرهان الرياضي والربط فيما بينها، (٣) تحليل مجموعة من مقاطع الفيديو وكذلك دروس مكتوبة في مجال البرهان الرياضي. في نهاية الفصل الدراسي، طلب من الطلاب مشاركة رأيهم عن مدي جاهزيتهم لتدريس البرهان الرياضي وذلك عن طريق الإجابة على استبانة مكونة من ١٦ سؤالاً متبوعة بمقابلات شخصية مقننة. وقد أظهرت النتائج أن الطلاب المعلمين لديهم تصورات جذرية خاطئة فيما يخص دور وطبيعة البرهان الرياضي، واقترحت الدراسة أن يتم تخصيص جزء صريح لتدريس دور وطبيعة البرهان الرياضي ضمن برامج إعداد المعلم، مع التركيز على زيادة الفرص للطلاب المعلمين لممارسة البرهان الرياضي والتدرب على أساليبه.

وقام (Stavrou, 2014) بدراسة المفاهيم الخاطئة وكذلك الأخطاء الشائعة لدى ٩٧ طالباً معلماً لمادة الرياضيات في نظام المدارس من الروضة حتى الثانوية (ك–١٢) وذلك عن طريق دراسة وتحليل واجباتهم المنزلية في مقرر نظرية الأعداد والجبر المجرد، وقد أظهرت النتائج أن الطلاب المعلمين اشتركوا في القيام بأربعة أخطاء هي: إثبات عبارات عامة باستخدام أمثلة خاصة، وافتراض الاستنتاج النهائي من أجل إثبات الاستنتاج، وعدم برهنة شرطي العبارات الثنائية، وعدم استخدام التعريفات بالشكل الصحيح.

وفي فصل دراسي مختلف لنفس المقرر، قام الباحث بتطبيق نفس الخطوات على ٩١ طالباً معلماً جديداً، حيث قام أولاً بشرح هذه الأخطاء لهم قبل أن يكلفهم بالواجبات المنزلية رغبةً في معرفة كيف ستختلف إجاباتهم عن عينة الدراسة السابقة. ولكن للأسف، اكتشف الباحث أن النتائج ليست بأفضل من سابقتها فقد دلت على ضعف قدرة كثير من الطلاب المعلمين على البرهان الرياضي حيث قدموا أمثلة غير ضرورية لاستكمال البرهان بالإضافة لوجود كثير من التمارين فارغة وبدون إجابة.

وبطريقة مشابهة قام (Zeybek,2017) بدراسة قدرة ٥٨ طالباً معلماً متخصصاً في تدريس الرياضيات للصفوف (٥–٨) على بناء وتقييم البرهان والتخمين الرياضي خلال مقرر يشمل موضوعات في مجالات رئيسية هي الجبر والهندسة ونظرية الأعداد، حيث تم تزويد الطلاب المعلمين بفرص متنوعة لبناء وتقييم مجموعة كبيرة العلاقات الرياضية. ورغم أن التخمين الرياضي يعتبر من الأجزاء الأساسية في عملية فهم وتأسيس المعرفة، إلّا أن النتائج أظهرت أن الطلاب المعلمون استخدموا التخمين الرياضي بشكل محدود جداً مقارنةً بالبرهان الرياضي، بالإضافة إلى أنهم استخدموا التخمين الرياضي فقط عند تم سؤالهم بشكل مباشر وليس مبادرةً منهم. كذلك أشارت الدراسة إلى أن أغلب حالات البرهان الرياضي التي قدمها الطلاب المعلمون كانت تحمل الطابع التوضيحي حيث تم استخدام البرهان الرياضي كأداة للشرح والتفسير وليس للإقناع.

وناقشت دراسة (Demiray&Bostan, 2017) مدى قدرة ١١٥ طالباً معلماً لمادة الرياضيات في المرحلة المتوسطة على تقديم برهان رياضي صحيح لمجموعة من العبارات الرياضية في مجال الأعداد والجبر، حيث تم التركيز على: (١) دراسة الطرق التي يستخدمها الطلاب المعلمون عند تقديم برهان صحيح، و(٢) دراسة أسباب الفشل عند تقديمهم برهان رياضي غير صحيح. وقد أظهرت النتائج أن أكثر من نصف العينة قدموا براهين صحيحة للعبارات الرياضية المقدمة وكان الاستقراء الرياضي والإثبات المباشر أكثر الطرق المستخدمة. وتبين أن الأسباب الشائعة لفشل الطلاب المعلمين في تقديم براهين رياضية كانت أولاً: التعويض بالأرقام عن طريق إدخال قيمة رقمية لمحاولة إثبات صحة العبارات الرياضية، وثانياً: إعادة كتابة المعطيات في العبارة الرياضية لمحاولة إثبات صحتها.

وكذلك طبّق (الزهراني، ٢٠١٨) استبانة مكونة من ٤٣ فقرة على عينة مكونة من ٢٧٠ طالب رياضيات معلم، و٢٣٦ طالبة رياضيات معلمة بهدف: (١) تحديد أنواع صعوبات تدريس البرهان الرياضي، و(٢) تحديد درجة كل نوع من صعوبات تدريس البرهان الرياضي (منخفضة– متوسطة– مرتفعة) و(٣) قياس أثر متغير النوع تجاه صعوبات تدريس البرهان الرياضي، وذلك من وجهة نظر عينة الدراسة. ولم تظهر النتائج وجود فروق ذو دلالة إحصائية تنسب لمتغير النوع، ولكنها أظهرت وجود صعوبات ذات مستوى متوسط مرتبطة بوجود

اعتقادات خاطئة نحو البرهان الرياضي وقصور في مهارات كتابة البرهان الرياضي والقدرة على شرحه في ظل وجود نقص في أعداد وتدريب طلاب الرياضيات المعلمين في المستوى الجامعي.

٣– التعقيب على الدراسات السابقة:

يتضح جليّاً من الدراسات السابقة التأثير الذي يُلقيه نوع التأهيل للطلاب المعلمين في برامج إعداد المعلم على مستوى المعلمين في المدارس، فالتأهيل الجيد يسهم في إنتاج معلم جيد والعكس صحيح. في مجال البرهان الرياضي، ما تزال الدراسات للأسف تشير إلى وجود قصور في مستوى الطالب المعلم وكذلك المعلم مما يشير إلى حاجة لمراجعة لآلية تعليم البرهان الرياضي في برامج إعداد المعلمين، لأن بقاء الصعوبات التي يواجهها الطالب المعلم دون تَحَدٍّ حقيقي سيعزز من استمرار المفاهيم والتطبيقات الخاطئة للبرهان الرياضي وبالتالي الانتقال معه من الجامعة للمدرسة ونقلها لطلابه، حيث لن يتمكن المعلم من تعليم الطلاب البرهان الرياضي بشكل متقن إلّا إذا امتلك المعرفة الكاملة والفهم العميق للبرهان الرياضي وكيفية تدريسه الصحيحة.

ثالثاً– الأنشطة المقترحة لتنمية البرهان الرياضي:

هناك نوعان من الأنشطة المستخدمة لتعليم البرهان الرياضي. النوع الأول هو أنشطة يتم فيها برهنة عبارات أو علاقات رياضية معروفة مسبقاً وتهدف إلي غرس المبادئ الأساسية التالية للبرهان الرياضي:

- أن العبارة/العلاقة الرياضية إما تكون صحيحة وإما خاطئة حيث لا مجال لوجود حل وسط
- لا يثبت صحة عبارة/علاقة رياضية لمجرد الحصول على العديد من الإجابات الصحيحة؛ لأن من النادر الحصول على الاستقراء الكامل باختبار كل الحالات الجزئية مثال واحد مضاد كافٍ لإثبات عدم صحة العبارة/العلاقة الرياضية. (الصافي، ٢٠١٥)

النوع الثاني وهو أنشطة مبنية على خلق عدم اليقين والتشكيك في صحة عبارة/ علاقة رياضية، وهذا النوع يعتبر الأفضل حيث أثبتت الدراسات أنه يحفز التفكير التحليلي والنقدي والسببي المقنع.

(Hadass, Hershkowitz, & Schwarz 2000;Buchbinder&Zaslavsky, 2011)

ومن سمات هذه النوع من الأنشطة أن "أن يكون نص السؤال قصيراً وواضحاً ...ومفتوحا؛ ألا تبدو النتيجة المستهدفة بديهية بالنسبة للجميع، يعني أن ننتظر صدور جوابين مختلفين، على الأقل، داخل مجموعة من التلاميذ؛ ألا يكون السؤال تعجيزياً، يعني أنه يمكن للمتعلم القيام ببعض المحاولات أو التجارب أو الملاحظات". (الصافي، ٢٠١٥، ١٥١)

رابعاً– خدع الضرب الرقمية Multiplication Tricks:

خدعة الضرب الرقمية هي عملية يتم فيها تجاوز إجراءات الحل التي تتم عادةً في العمليات التقليدية للوصول للحل مباشرة بخطوات محدودة. على سبيل المثال، عند الضرب في ١١ كما في المثال (١١×٢٣) يكون الحل باستخدام خطوتين فقط كالتالي:

١– اجمع رقمي العدد ٢٣: (٣+٢) = ٥.

٢– ضع الناتج ٥ بين ٣ و٢ لتحصل على الإجابة ٢٥٣.

هنا تم اختزال جميع العمليات الأساسية في الحل من ضرب وجمع وحمل في عملية حسابية بسيطة تم من خلالها الحصول على الإجابة الصحيحة بدقة وسرعة. وللخدع الضرب الرقمية عدة فوائد منها:

- إعطاء إجابة دقيقة.
- إعطاء إجابة في وقت قصير جدّاً لا يتعدى ثوان.
- سهولة التنفيذ حيث يمكن أن يؤديها كل من يملك المهارات الحسابية الأساسية.
- مشوقة وخاصةً لصغار السن.
- المساعدة في تعلم مواضيع أخرى في مادة الرياضيات.
- المساعدة في تعزيز الاتجاه الإيجابي نحو مادة الرياضيات.
- المساعدة في تعاملات الحياة اليومية.

(Benjamin &Shermer, 2008; Kelly, 2014 &Abhishek, 2017)

ولكون كيفية عمل خدع الضرب الرقمية غامضة، فأن محاولة إثبات صحة عملها من عدمه يعتبر من الأنشطة التي تحفز على البحث والتخمين والاكتشاف مما قد يسهم في تنمية مهارة البرهان الرياضي، لذا فقد تم اختيار أحد خدع الضرب الرقمية في هذه الدراسة لمعرفة طبيعة البرهان الرياضي الذي يملكه الطلاب المعلمون.

الطريقة والإجراءات:

أولاً– منـهج الدراسة:

تم استخدام منهج خليط ما بين الكمي والنوعي لأن "الدليل الكمي قد يكون قوياً جدّاً، ولكنه أيضاً قد يخفي قدراً كبيراً من المعلومات والبيانات التي يكشفها الدليل النوعي" (مطاوع وجعفر الخليفة، ٢٠١٩، ٦٣). كميّاً، تم استخدام أعداد ونسب مئوية لمعرفة ماذا قدم الطلاب المعلمون لتفسير خدعة الضرب الرقمية. كيفيّاً، تم الحصول على تقارير مكتوبة والقيام بمقابلات شخصية لدراسة كيف ولماذا نجح أو فشل الطلاب المعلمين في تفسير خدعة الضرب الرقمية.

ثانياً– عينة الدراسة:

تمثلت عينة الدراسة الحالية في عدد(٢٩) طالباً معلماً بكلية التربية ممن لديهم خلفية علمية في المرحلة الثانوية حيث تم اختيارهم بأسلوب العينة الملائمة (Convenience Sampling) لتحقيق هدف الدراسة.

ثالثاً– أدوات البحث:

١– نوع الأداة:

تم استخدام خدعة ضرب رقمية في عملية الضرب لتحقيق هدف الدراسة، حيث إن المقصود بالخدعة الرقمية هو التلاعب بالأرقام للحصول على إجابة سريعة في مدة لا تتجاوز خمس ثوانٍ عند القيام بضرب عدد مكون من رقمين بعدد آخر مكون من رقمين. يمكن توضح قواعد وإجراءات تنفيذ عمل الخدعة الرقمية عن طريق المثال التالي:

	آحاد	عشرات
	٤	٢
×		
	٦	٢
	٦×٤	×٢ (٢+١)
	٢٤	٦
	٦٢٤	

٢– آلية عمل الأداة:

قواعد خدعة الضرب الرقمية الخاصة بالعددين المضروبين تكون كالتالي:

- مجموع رقمي الآحاد في العددين يساوي عشرة (٦+٤=١٠).

- الرقم في خانة العشرات في العددين هو نفسه في (٢).

إجراءات تنفيذ عمل خدعة الضرب الرقمية تكون كالتالي:

- في خانة الآحاد: يتم ضرب رقمي الآحاد ببعضهما البعض والناتج يعتبر هو الجزء الأول (الأيمن) من الإجابة النهائية.
- في خانة العشرات: يتم أولاً إضافة ١ (عشرة واحدة) لرقم العشرات في العدد الأول (أو العدد الثاني لأنه نفس الرقم) ومن ثم ضربه برقم العشرات في العدد الثاني، والناتج يعتبر الجزء الثاني (الأيسر) من الإجابة النهائية.
- يتم ضم الناتجين (الأيمن والأيسر) لتكوين الإجابة النهائية لعملية الضرب.

خدعة الضرب الرقمية تعطي إجابة صحيحة في وقت قصير ولكن كيفية عملها بشكل دقيق هو الجزء الغامض الذي يحتاج الطالب المعلم إثبات صحته. وقد فسّر (Buchbinder& Cook, 2016) هذا الغموض حيث ذكروا أنه عندما يتم تمثيل حل هذه الخدعة الرقمية جبرياً فإنه يتضح أنها لا تعدو كونها إحدى الحالات الجبرية الخاصة لعملية الضرب التقليدية لعدد مكون من رقمين بعدد آخر مكون من رقمين كالتالي:

(خدعة الضرب الرقمية) **حالة جبرية خاصة لعملية الضرب التقليدية لعدد مكون من رقمين بعدد آخر مكون من رقمين**	**التمثيل الجبري لعملية الضرب التقليدية لعدد مكون من رقمين بعدد آخر مكون من رقمين**
$a = c, b + d = 10$	a, b, c, d
$(10a + b)(10a + d) =$ $100a^2 + 10a(b + d) + bd =$ $100a^2 + 100a + bd =$ $100a(a + 1) + bd$	$(10a + b)(10c + d) =$ $100ac + 10(ad + bc) + bd$

ونظراً للطبيعة المختلفة لهذه الخدعة الرقمية، فإن هذه الدراسة تسعى لمعرفة مختلف أنواع الحلول وإجراءاتهاالتي يستخدمها الطلاب المعلمون في إثبات صحتهاوخاصة الجبرية منها.

رابعاً- جمع البيانات وتحليلها:

١- مصادر البيانات:

تم جمع معلومات الدراسة من ثلاثة مصادر رئيسة:

- أوراق إجابات الطلاب.
- تقارير الطلاب.
- مقابلة شبة مقننة باستخدام نمط "مجموعة الحوار المركزة".

٢- إجراءات جمع البيانات من مصادرها وتحليلها:

وقد تمت الإجراءات وفق الخطوات التالية:

- تطبيق وشرح كيفية عمل خدعة الضرب الرقمية للطلاب داخل القاعة الدراسية من قبل أستاذ المقرر.
- تزويد الطلاب بورقة تحتوي على إجراءات تنفيذخدعة الضرب الرقمية والطلب منهم دراسة الخدعة وتحليلها ثم إثبات صحتها أو عدم صحتها كتابياً، مع تقديم تقرير يشمل على شرحٍ كافٍ لكيفية إثبات الصحة أو عدمه.
- إعطاء الطلاب المعلمين مدة أسبوع لإكمال هذه المهمة، مع السماح لهم بالعمل الجماعي لتبادل الأفكار فيما بينهم على أن يُسلم كل طالب ورقة إجابة وتقرير خاص به بشكل فردي.
- الحصول على أوراق إجابات الطلاب وتقاريرهم بعد انتهاء المدة المحددة ثم دراستها وتحليل محتواها، حيث تم تحليل طبيعة البرهان الرياضي المستخدم وتصنيفه حسب التالي:
  - أنواع الحلول التي استخدمها الطلاب المعلمون (حل جبري فقط ويقصد به استخدام الرموز الجبرية فقط لإثبات صحة خدعة الضرب الرقمية، وحل حسابي فقط ويقصد به استخدام أمثلة حسابية فقط لإثبات صحة خدعة الضرب الرقمية، وحل جبري+ حل حسابي ويقصد به استخدام الرموز الجبرية وكذلك أمثلة حسابية لإثبات صحة خدعة الضرب الرقمية).
  - مدى صحة البرهان الرياضي الذي استخدمه الطلاب المعلمون (برهان صحيح كليّاً، وبرهان صحيح جزئياً، وبرهان غير صحيح).

وبناءً على نتائج تحليل المحتوى، تم تحديد ٣ مجموعات من الطلاب (١٠، ١٠، ٩) بناءً على طبيعة الحلول والتفسيرات التي قدموها، وعليه تم إجراء مقابلة شبة مقننة مع كل مجموعة على حدة لمدة نصف ساعة في قاعة دراسية محددة ووقت محدد. مقابلة شبه مقننة تعني انه طُرحت أسئلة محددة سلفاً (تخص طبيعة حلول الطلاب والتفسيرات التي قدموها لهذه الحلول) مع طرح أسئلة أخرى فرعية انبثقت من الحوار وساعدت في فهم ما سعت إليه الدراسة (سرحان، ٢٠١٧).

- ربط كل البيانات التي تم الحصول عليها من المصادر الثلاثة مع بعضها البعض وتحليلها للوصول إلى فهم لطبيعة البرهان الرياضي المستخدم من الطلاب المعلمين في تفسير خدع ضرب رقمية شاملاً النجاحات والصعوبات التي واجهوها.

نتائج الدراسة ومناقشتها:

أولاً– إجابة السؤال الأول من أسئلة الدراسة وهو:

ما أنواع الحلول التي يستخدمها الطلاب المعلمون في إثباتصحة خدعة ضرب رقمية؟

يوضح الجدول (١) توزيعاً بأنواع الحلول التي استخدمها الطلاب المعلمون في إثبات صحة أو عدم صحة خدعة الضرب الرقمية.

جدول (١) أنواع الحلول التي استخدمها الطلاب المعلمون

نوع الحل / صحة البرهان	حل جبري فقط		حل حسابي فقط		حل جبري + حل حسابي		المجموع	
	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية
برهان صحيح كلياً	٠	٠٪	٠	٠٪	٠	٠٪	٠	٠٪
برهان صحيح جزئياً	٠	٠٪	٢٠	٦٩٪	٩	٣١٪	٢٩	١٠٠٪
برهان غير صحيح	٠	٠٪	٠	٠٪	٠	٠٪	٠	٠٪
المجموع	٠	٠٪	٢٠	٦٩٪	٩	٣١٪	٢٩	١٠٠٪

يتضح من الجدول (١) أن جميع الطلاب المعلمين (٢٩) أشاروا إلى أن خدعة الضرب الرقمية صحيحة ويمكن تطبيقها على كل الأعداد التي تنطبق عليها الشروط، واستخدموا طرقاً لمحاولة إثباتها اقتصرت على حلول حسابية وأخرى جبرية. جميع الطلاب المعلمين طبقوا حلولاً حسابية حيث استخدموا ما بين ٢–٥ أمثلة في محاولة للوصول إلى قرار بإثبات صحة خدعة الضرب الرقمية من

عدمها اتباعاً للأسلوب الاستقرائي. بالإضافة لهذه الحلول الحسابية، تسعة فقط من التسعة وعشرون طالباً قاموا بمحاولات جبرية لبرهنة خدعة الضرب الرقمية بشكل عام، جميع الحلول سواءً حسابية أو جبرية والتي استخدمت لإثبات صحة خدعة الضرب الرقمية كانت غير مكتملة. تفاصيل عدم اكتمال الحلولموضحة في إجابة السؤال الثاني والثالث للدراسة، والصعوبات التي أدت إلى عدم اكتمال الحلول موضحة في إجابة السؤال الرابع للدراسة.

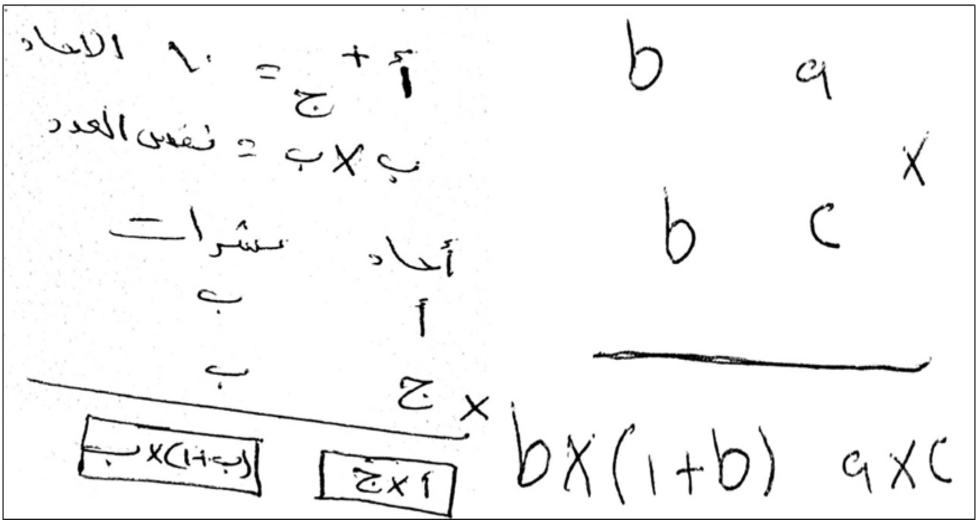
ثانياً– إجابة السؤال الثاني والثالث من أسئلة الدراسة وهما:

ما إجراءات الحلول التي يستخدمها الطلاب المعلمون فيإثباتصحة خدعة ضرب رقمية؟

ما الأسباب التي دعت الطلاب المعلمين لتفضيل نوع حل أو أنواع حلول معينة في إثباتصحة خدعة ضرب رقمية؟

١– الحلول الجبرية:

الحلول الجبرية كانت محدودة (٩ حلول فقط) وجميعها غير مكتملة حيث لم تتعدى تحويل مثال حسابي إلى مثال جبري، بمعنى آخر تحويل الأعداد في المثال الحسابي إلى رموز جبريه وتمثيل شروط خدعة الضرب الرقمية برموز جبرية (أنظر للشكل١).



الشكل(١) نموذج من الحلول الجبرية

وفي الفقرة التالية تعليقات مجمعة من الطلاب بخصوص أسباب عدم قدرتهم على إثبات صحة أو عدم صحة خدعة الضرب الرقمية جبرياً:

"آخر مرة استخدمت فيه البرهان الرياضي كان في المرحلة الثانوية ... ما أتذكر أنني واجهت مسألة برهان رياضي من بداية دراستي في الكلية ... أنا ما أحب البرهان الرياضي ... معقد وصعب ويحتاج كثير من الوقت والجهد ... صراحة أنا تعلمت أني أحفظ خطوات معينة واطبقها ... كنا نتعلم أمثلة ونطبق مثلها ... لكن ما قدرت [أجيب] عن هذه المسألة ...استخدام الأعداد أسهل عندي من الرموز".

يتضح جلياً من حلول الطلاب المعلمين وتعليقاتهم أن لديهم قصوراً كبيراً في فهم البرهان الجبري وتطبيقه، وهذا كان السبب الرئيسي في عدم قدرة البعض(٩) على تجاوز الخطوة الأولى منالحل وتَجَنُّبَ الأغلبية (٢٠) لاستخدام الحل الجبري نهائياً.

٢- الحلول الحسابية:

اتضح أن جميع الطلاب المعلمين قاموا باستخدام ما بين ٢-٥ أمثلة في محاولة للوصول إلى قرار بإثبات صحة خدعة الضرب الرقمية من عدمها حسابياً باستخدام الأسلوب الاستقرائي. الاستقراء الكامل لخدعة الضرب الرقمية كان ممكناً لأن الشرط الأول لخدعة الضرب الرقمية نص على أن يكون مجموع رقمي الآحاد للعددين المضروبين يساوي ١٠، لذلك الخيارات المتاحة هي ٥ خيارات (١و٩، ٢و٨، ٣و٧، ٤و٦، ٥و٥) باعتبار أن ١و٩ هو نفسه ٩و١ لأن التركيز هنا على مجموع الرقمين وليس ترتيبهما وهذا ينطبق على بقية الخيارات.

بمعنى آخر، الحد الأعلى من الأمثلة التي يمكن أن يستخدمه الطالب المعلم لبرهنة صحة خدعة الضرب الرقمية من عدمها قليل وهو ٥ أمثلة. على الرغم من قلة العدد، طالب واحد فقط استخدم ٥ أمثلة. البقية استخدموا عدداً من الأمثلة كالتالي: أربعة طلاب استخدموا ٤ أمثلة، وعشرة طلاب استخدموا ٣ أمثلة، وأربعة عشر طالباً استخدموا ٢ مثال. أثناء المقابلة، أحد الطلاب المعلمين والذي استخدم مثالين فقط قدّم سبباً كالتالي:

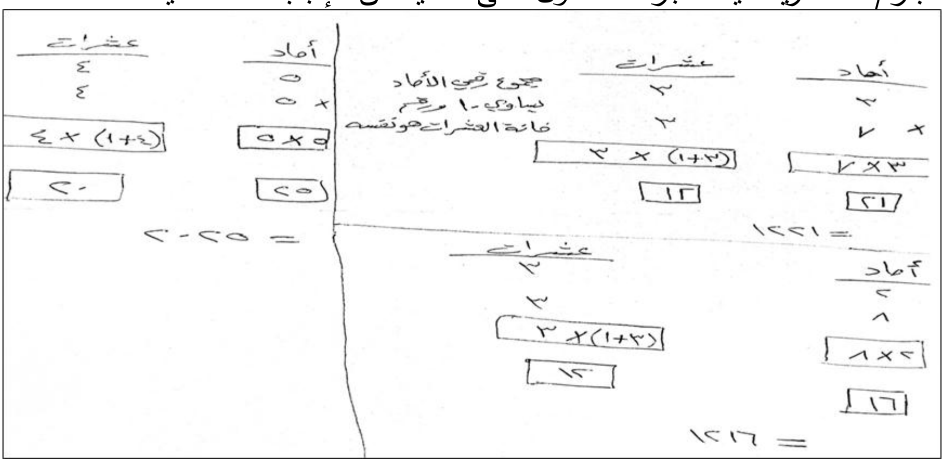
"قمت وأنا وزميلي خلال العمل الجماعي باستخدام أمثلة كثيرة ... ولكن لأنه لابد أن نقدّم ورقة إجابة منفصلة، اختار زميلي بعض الأمثلة ليضمنها في ورقة إجابته

وأنا استخدمت البقية ... نعمل دائماً بشكل جماعي ولكن نحرص أن نقدم شيئاً مختلفاً بقدر الإمكان ... هذا ما تعودنا عليه".

طالب معلم آخر قدّم سبباً مشابهاً حيث ذكر بأنه يحب الكتابة بخط كبير وعشوائي تجريبي أحياناً لذلك هو قام " بتطبيق الخدعة الرقمية على الأمثلة الخمسة المحتملة في ورقة جانبية ... ولكن [دوّن] فقط ثلاثة أمثلة في ورقة الإجابة المطلوبة حتى تظهر بشكل جيد"، وطالب معلم ثالث قدّم سبباً مختلفاً حيث شرح سبب استخدامه لعدد محدود من الأمثلة كالتالي:

"قمت بتطبيق شروط الخدعة الرقمية [مجموع رقمي الآحاد يساوي ١٠] في مستويات مختلفة: صغيرة ومتوسطة وكبيرة ... استخدمت ٢و٨ ... استخدمت ٣و٧ ... واستخدمت ٥و٥ ... طبعاً رقم العشرات كان ثابت في كل مثال [رقم خانة العشرات هو نفسه] ... وتأكدت من أن جميع الإجابات التي توصلت لها كانت صحيحة عن طريق استخدم الآلة الحاسبة ... أعتقد أن هذه الأمثلة كانت كافية حتى تدل على صحة الخدعة الرقمية"

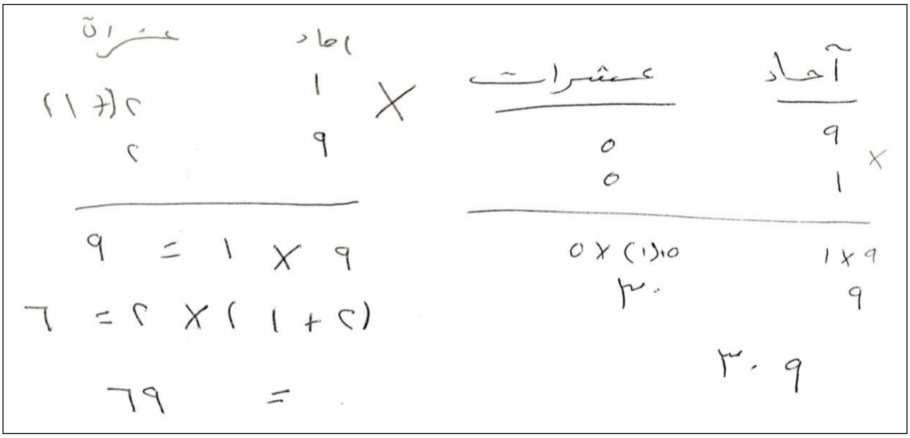
وهذا التفسير الأخير الذي يشير أن استخدام مجموعة من الأمثلة الصحيحة كان كافياً لإثبات صحة خدعة الضرب الرقمية يمثل رأي معظم الطلاب المعلمين الذين استخدموا ٢–٣ أمثلة في إجاباتهم وهم الأغلبية (أنظر للشكل٢)، ولكن هذا يخالف قاعدة من القواعد الأساسية في البرهان الرياضي وهي أنه لا يثبت صحة عبارة/علاقة رياضية لمجرد الحصول على العديد من الإجابات الصحيحة.



الشكل(٢) نموذج يمثل عدد الأمثلة التي استخدمها الطلاب المعلمون

حالة ضرب خاصة (عندما يكون رقمي الآحاد ١ و٩)

عندما يكون رقم الآحاد في العدد الأول ١ ورقم الآحاد في العدد الثاني ٩ أو العكس تعتبر حالة الضرب هذه خاصة عند استخدام الخدعة الرقمية. السبب لأن ضرب كل أزواج أرقام الخيارات الأخرى المتاحة يؤدي ناتج عدد ذو رقمين كالتالي: (٢*٨=١٦، ٣*٧=٢١، ٤*٦=٢٤، ٥*٥=٢٥)، بعكس ضرب ١ و٩ والذي يؤدي إلى ناتج ذو رقم واحد هو ٩. فالإجابة على حالة الضرب الخاصة هذه تحتاج إلى استيعاب للقيمة المكانية للأرقام (الآحاد، والعشرات، والمئات، والألوف) في العددين المضروبين وكذلك في ناتج عملية الضرب. في هذه الدراسة، خمسة طلاب فقط ضمنوا خمسة أمثلة كلٍ في ورقة أجابته تمثل حالة الضرب الخاصة عندما يكون رقمي الآحاد ١ و٩ وكل الإجابات كانت خاطئة (أنظر للشكل٣).



الشكل(٣) نموذج يمثل حالة الضرب الخاصة (عندما يكون رقمي الآحاد ١ و٩)

وعند سؤال الطلاب أثناء المقابلة الشخصية عن سبب عدم قدرتهم على إجابة هذا الحالة تحديداً بشكل صحيح، قدموا مجموعة من الأسباب توضحها الفقرة التالية والتي تشمل على ردود مجمعة من الطلاب الخمسة تمثل حالتهم بشكل عام:

"صراحةً ما تأكدت من صحة [حالة الضرب عندما يكون رقمي الآحاد ١ و٩] بالتحديد ... تأكدت من أمثلة أخرى وكانت صحيحة ... ولهذا السبب طبقت [الخدعة الرقمية] مباشرةً على هذا المثال بدون مراجعة للتأكد من صحته ...

شكيت في صحة النتيجة ... لأن النواتج في كل الأمثلة الأخرى تحتوي على أربعة أرقام إلاّ هذا المثال ... ولكن القاعدة هي القاعدة، نتبعها دائماً لأنها هي الصح ... صراحةً صعب على الطالب أنه يجيب شيء جديد خاصة في الرياضيات... أسهل أنك تستخدم القواعد وتتبعها ... ما قدرت أحلها بطريق مختلفة"

لم يستطع أحد من الطلاب الخمسة تقديم تفسير للخطأ الذي وقعوا فيه عند الإجابة على حالة الضرب عندما يكون رقمي الآحاد ١ و٩، لذا تمت مناقشة الطلاب في الإجابة لفحص مدى استيعاب هم للقيمة المكانية للأرقام في حالة الضرب التالية على سبيل المثال:

	آحاد	عشرات	
	٩	٥	= ٥٠ + ٩
×			
	١	٥	= ٥٠ + ١
	٣ ٠ ٠ ٩		

الإجابة باستخدام قواعد خدعة الضرب الرقمية تكون كالتالي:

أولاً- ١ آحاد مضروباً في ٩ آحاد ينتج ٩ آحاد.

ثانياً- (٥عشرات + عشرة واحدة) مضروباً في ٥ عشرات تعني (٥٠+١٠) مضروباً في (٥٠) تعني٦٠ مضروباً في ٥٠ وتساوي ٣٠٠٠.

وعليه فالناتج النهائي حسب القاعدة هو: ٩ + ٣٠٠٠= ٣٠٠٩ وليس ٣٠٩ عند مراعاة القيمة المكانية للأرقام. تفهم الطلاب المعلمين خطأهم ولكنهم توقفوا كثيراً عند أن ٥١ تعادل ١+ ٥٠ وكأنه شيء جديد للتو تعلموه، مما يشير إلى أن لدى بعضهم سوء فهم للقيمة المكانية للأرقام.

ثالثاً: إجابة السؤال الرابع من أسئلة الدراسة وهو:

ما الصعوبات التي قد يواجهها الطلاب المعلمون في إثبات صحة خدعة ضرب رقمية؟

١- الصعوبات الجبرية:

عزى الطلاب الصعوبات التي أدت إلى عدم قدرتهم على تفسير خدعة الضرب الرقمية جبرياً للأسباب التالية:

- انقطاعهم عن التعامل مع البرهان الرياضي لفترة طويلة حيث لم يمارسوه منذ بداية دراستهم الجامعية.
- عدم إعطاء جهد ووقت كاف لإثباتخدعة الضرب الرقمية جبرياً بسبب الاتجاه السلبي الذين يحملونه تجاه للبرهان الرياضي حيث يرون أن أفكاره معقدة.
- ضعف في مهارة البرهان الرياضي لديهم نتيجة طريقة تعلمهم له في المراحل الدراسية والتي تعتمد على تلقينواتباع خطوات محددة لإثبات علاقات معروفة مسبقاً.

ونتيجة لهذه الصعوبات، لم يستطع إي طالب معلم من حل خدعة الضرب الرقمية جبرياًّ، وهذا يتفق مع دراسات قديمة وحديثة (Ko& Shy, 2008; Stavrou, 2014) والتي تظهر عدم قدرة الطلاب المعلمين في حالات متعددة من استخدام البرهان الجبري أو البدء فيه وعدم إنهاء خطواته.

٢- الصعوبات الحسابية:

الصعوبات التي صاحبت الحل الجبري الموضحة أعلاه دفعت الطلاب المعلمين في هذه الدراسة لأن يفضلوا استخدام الأسلوب الاستقرائي لسهولته ووضوحه بالنسبة لهم وعليه محاولة إثبات خدعة الضرب الرقمية حسابياً وليس جبرياً. صحيحاً أن الأسلوب الاستقرائي مناسباً لتوضح بعض المفاهيم الأساسية ولكن لا يعتبر منهجاً يقيناً لأنه لا يمكن عرض جميع الأمثلة في أغلب الحالات للتوصل لصحة القاعدة (التميمي، ٢٠١٦). ومع أن خدعة الضرب الرقمية في هذه الدراسة من الحالات النادرة التي كانت تسمح للطلاب المعلمين باختبار جميع الأمثلة، إلّا أنهم لم يستطيعوا تقديم إثبات مكتمل بشكل قاطع على الرغم من إعطائهم الوقت الكافي (مدة أسبوع) والفرصة للعمل بحرية خارج نطاق القاعة الدراسية.

حسابياً، اتضح أن الطلاب المعلمين لديهم صعوبات في فهم وتطبيق بعض المكونات الأساسية (مثل القيمة المكانية للأرقام، عملية الضرب، حقائق الضرب، عملية الجمع، حقائق الجمع، عملية الحمل ... إلخ) التي يحتاجون الربط فيما بينها لتفسير خدعة الضرب الرقمية. جوانب القصور مرتبة من الأكثر حدوثاً إلى الأقل كالتالي:

- ضعف في تطبيق الصورة الذهنية لقيمة الأرقام حيث يدرك معظم الطلاب المعلمين أن ٥ في العدد ٥١ تعني ٥ عشرات ولكن تفصيلها بالشكل التالي: ١ + ٥٠ كان مثار استغراب لكثير منهم
- عدم إجادة وضع الأرقام في قيمها المنزلية الصحيحة بعد عملية الضرب
- عدم إجادة بعض حقائق جدول الضرب

وتتفق هذه النتائج مع نتائج الدراسات السابقة التي تمت مناقشتها في هذه الدراسة حيث أكدت أن الطلاب المعلمين غالباً ما يواجهون صعوبات متعلقة بأفكار البرهان الرياضي وتطبيقاته وأدواره المختلفة في الرياضيات. وعلى الرغم أن الصعوبات المناقشة في نتائج هذه الدراسة كانت هي الأسباب الخاصة والتي أثرت على أداء الطلاب المعلمين في إثبات صحة خدعة الضرب الرقمية جبرياً وحسابياً، إلّا أن هناك سبباً عاماً قد لا يقل أهمية عن هذه الأسباب الخاصة وهو أن الطلاب المعلمين يؤمنون بأن كلمة "قاعدة" تعني الصحة على الإطلاق ولا يوجد طائل من محاولة إثبات عدم صحتها أو مناقشة احتمالية خطأ أجزائها، حيث لا زال فكرهم مقيداً بفكرة أن الطالب متلقي للمعلومة أكثر منه مفكراً ومشاركاً ومنتجاً للمعرفة مما أعاق ظهورهم بمستوى أفضل، وقد يكون هذا نتيجة طبيعية لإهمال مهارات التفكير في التعليم أو إدراجها شكلياً وتدريسها نظرياً مما يستوجب تجديد الدعوةبضرورة دمج تعلّم مهارات التفكير في المناهج الدراسية عن طريق إعادة صياغة وهيكلة هذه المناهج في صورة تواكب تطلعات القرن الواحد والعشرين بحيث يتكامل فيها المحتوى التعليمي وطرائق التدريس مع مهارات التفكير مع التركيز في التطبيقات العملية عليها (المقاطي، ٢٠٠٨).

وتجدر الإشارة هنا بأن الخدع الرقمية بحد ذاتها لا تدعم تنمية مهارة البرهان الرياضي وإنما التشكيك في صحتها الرياضي هو الذي يدعمه. عندما يشك المتعلم في صحة خدعة رقمية ما، يقوم ببذل جهد في البحث والتخمين لاكتشاف المعرفة المفاهيمية (ConceptualKnowledge) الذي انطلقت منه والذي يجعل تطبيقها صحيحاً وبذلك يكتسب فهماً عميقاً للتساؤل "لماذا"، حيث يستلزم عليه أن يربط رياضياً ما يملكه من مخزون علمي مع معطيات محددة ويحلل العلاقة بينهما لتقديم تبرير منطقي يقبله العقل يدل على صحة عمل الخدعة الرقمية.

وقد تمت الإشارة لعبارة " ما يملكه من مخزون علمي" للتأكيد على أن عدم امتلاك المتعلم على الأجزاء الداخلية المكونة لظاهرة ما سيعيق فهمه وتفسيره لصحتها، فلكل عبارة أو علاقة رياضية مكونات يلزم الطالب المعلم الإلمام بها أولاً والربط فيما بينها حتى يتمكن من إثبات صحة العلاقة أو عدم صحتها. فعدم إلمام المعلم الطالب بالقيمة المكانية للأرقام، على سبيل المثال، يجعل من الصعب على اثبات صحة الخدعة الرقمية أو عدم صحتها.

وهذا يقود إلى الإشارة للتأثير السلبي لتعليم مثل هذه الخدع الرقمية لجميع المتعلمين، وخاصةً الأطفال قبل أن تكتمل المعرفة المفاهيمية لديهم بشكل عميق، حيث يؤدي تدريبهم على طرق تساعدهم في الحصول على الإجابة الصحيحة بشكل سريع دون التركيز على الأساس الفكري إلى صعوبات تعلم في مستويات أعلى ليس في مجال الرياضيات وحسب وإنما في مجالات أخرى، فليس كافياً أن يقوم المتعلم بمعرفة "ماذا" و "كيف" وإنما يستلزم عليه معرفة "لماذا".

ومن أشهر الخدع الرقمية التي يتعلمها الأطفال دون فهمها هي قاعدة قسمة الكسور (ثبيت الكسر الأول كما هو + تحويل رمز القسم إلى ضرب + قلب الكسر الثاني حيث يصبح البسط مقاماً والمقام بسطاً + ضرب البسط في البسط والمقام في المقام) وهي قاعدة سهلة وعملية وسريعة وتعطي إجابة صحيحة، ولكن غالباً ما يجد الأطفال وكذلك الطلاب المعلمين صعوبة في تفسير لماذا تعمل هذه القاعدة بشكل صحيح (Alenazi, 2016)، أو بمعنى آخر، يعجزوا عن تقديم ما تعنيه عملية قسمة كسرين مثل $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$، والتي تحمل عدّة معاني أبسطها "كم يُوجد رُبع ($\frac{1}{4}$) في النصف($\frac{1}{2}$)" رغم قدرتهم على تقديمهم إجابة سريعة صحيحةكالتالي: $\frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = 2$.

فيجب التوازن ما بين النظرية والتطبيق وهذا ما أشار إليه ومازال يشير إليه المجلس العلمي لمعلمي الرياضيات (NCTM) منذ ٢٠٠٠ بأهمية الجمع ما بين المعرفة المفاهيمية والمعرفة الإجرائية (Procedural Knowledge)، فهما مكملان لبعض حيث إن التركيز على مهارة تطبيق الطرق الحسابية بدون فهمها يؤدي غالباً إلى نسيانها أو تذكرها بشكل غير صحيح، وأن التركيز على الفهم فقط دون تنمية مهارة التطبيق يؤدي إلى إعاقة المتعلم في حل المشكلات الرياضية بالشكل المنشود وبالتالي إعاقة تعلمه لموضوعات أعلى مستوى.

ونظراً لوجود العديد من الخدع أو القواعد التي تعلمها الطلاب المعلمين دون فهمها أو فهمها جزئياً خلال مسيرتهم التعليمية، فإن إشراكهم في أنشطة تعليمية تشكك في صحة هذه الخدع والقواعد يعتبر فرصة لتنمية مهارة البرهان الرياضي بشكل فعال، حيث لا تدعو مثل هذه الأنشطة إلى اتباع خطوات روتينية للبرهان وإنما تدفعهم للتفكير والاكتشاف والإبداع، بشرط التأكد من امتلاك الطلاب المعلمين للمكونات الأساسية لهذه الخدع والقواعد.

التوصيات:

وفي ضوء نتائج الدراسة الحالية، يوصي الباحث بما يلي:

١- تضمين البرهان الرياضي الجبري في برامج إعداد المعلمين فعلياً وليس شكلياً، وتطبيقه وليس الاكتفاء فقط بتدريسه نظريّاً.

٢- تضمين أنشطة برهان رياضي جبري ذات طبيعة تثيرالشك في صحة الظواهر الرياضية وتدفع الطالب المعلم للبحث والاكتشاف وليست تلك التي تدفعه للتعامل مع البرهان الرياضي كممارسة روتينية لتبرير عبارات أو علاقات رياضية معروفة مسبقاً.

٣- غرس مفهوم أن الطالب ليس متلقياً للمعرفة فقط، وإنما هو منتج لها، وذلك عن طريق تنمية مهارات التفكير لديه عملياً، ومنحه الفرصة للإبداع.

المقترحات:

١- القيام بمزيد من الدراسات البحثية النوعية بحيث تستخدم أنشطة برهان رياضي جبريمتنوعة لمعرفة المزيد عن طبيعة البرهان الرياضي لدى الطالب المعلم وكذلكلتنمية إدراكه نوعيّاً وتعميق فهمه بالتركيبات الأساسية والمعقدة لأفكار البرهان الرياضي.

٢- القيام بدراسات بحثية لمعرفة أفضل الطرق لكيفية دمج أو تضمين البرهان الرياضي في برامج إعداد المعلمين.

مراجع الدراسة

أولاً– المراجع العربية:

أبوعقيل، إبراهيم (٢٠١٥). معوقات تدريس البراهين الرياضية في المرحلة الأساسية العليا من وجهة نظر معلمي الرياضيات. المجلة التربوية، جامعة الكويت، ٢٩، ٢٠٩–٢٤١.

التميمي، جاسم (٢٠١٦). تعليم الرياضيات ومناهجها لمعلم الصف. الأردن، عمان: مركز الكتاب الأكاديمي.

الجوعاني، مجبل ومحمد، فاضل (٢٠١٣). مهارات البرهان الرياضي لدى طلبة الصف. مجلة القادسية في الآداب والعلوم التربوية، جامعة القادسية، ١٢ (٣)، ٣٧٧– ٤٣٤.

الخطيب، محمد (٢٠١٢). أثر تدريس الهندسة باستخدام التعليم القائم على التفكير الرياضي بالتوصل للنظريات الرياضية وبرهانها وتطبيقاتها لدي طلاب الصف العاشر الأساسي في الأردن. دراسات العلوم التربوية، ٣٩ (١)، ٨١–٩٦.

الزهراني، يحي (٢٠١٨). صعوبات تدريس البرهان الرياضي من وجهة نظر طلاب وطالبات الرياضيات المعلمين بجامعة أم القرى في المملكة العربية السعودية. محلة القراءة والعرفة، جامعة عين شمس، ٢٠٤، ٢٢٧–٢٥٧.

سرحان، باسم (٢٠١٧). طرائق البحث الاجتماعي الكمية. قطر، الدوحة: المركز العربي للأبحاث ودراسة السياسات.

الصافي، عبد اللطيف (٢٠١٥). دراسة حول البرهان الرياضي (٢): نحو تأسيس معنى البرهان الرياضي عند تلاميذ السنة الأولى ثانوي إعدادي. مجلة علوم التربية، ٦٢، ١٤٤–١٥٢.

مطاوع، ضياء وجعفر الخليفة، حسن (٢٠١٩). البحث التربوي الكميوالنوعي والإجرائي وتطبيقاته في حلقة البحث. المملكة العربية السعودية، الرياض: مكتبة الرشد.

المقاطي، بتول (٢٠٠٨). مهارات التفكير الرياضي اللازمة لطالبات رياضيات الصف الأول متوسط. جامعة أم القرى. تم التحميل **يناير ١٥، ٢٠١٨** من الرابط
http://libback.uqu.edu.sa/hipres/ABS/ind7106.pdf

<u>ثانياً– المراجع الأجنبية:</u>

Alenazi, A. (2016). Examining middle school pre-service teachers' knowledge of fraction division interpretations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(5), 696-716.

Abhishek, V. (2017). *Mental Math: Tricks to Become A Human Calculator*. SAGE Publishing.

Ball, D.L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J.Boaler (Ed.) *Multiple Perspectives on Mathematics of Teaching and Learning*. (pp. 83-104). Westport, Conn.: Ablex Publishing.

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 2, pp. 57–64), Norwich, UK.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof – explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23–40.

Benjamin, A.,&Shermer, M. (2008). *Secrets of Mental Math: The Mathemagician's Guide to Lightning Calculation and Amazing Math Tricks*. Crown Puplishing Group, New York.

Buchbinder, O., & Cook, A. (2016). Pre-service teachers' construction of algebraic proof through explorationof math-tricks. In K. Krainer& N. Vondrová. CERME 9 - *Proceedings ofthe Ninth Congress of the European*

Society for Research in Mathematics Education, (pp.100-106). Prague, Czech Republic

Buchbinder, O., &Zaslavsky, O. (2011). Is this a coincidence? The role of examples in fostering a need for proof. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *43*(2), 269–281.

Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards: Mathematics*. Washington D.C.

Demiray E., Bostan M. (2017). An Investigation of pre-service middle school mathematics teachers' ability to conduct valid proofs, methods used, and reasons for invalid arguments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15, 109-130.

de Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Ernest, P. (2010). Add it up: Why teach mathematics. Professional Educator, 19 (2), 44-47.

Hadas, N.,Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics,* 44(1 & 2), 127–150.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto, Ontario: OISE Press.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange,* 21(1), 6–13.

Kelly, G. (2014). *Short-Cut Math*. Dover Publications, New York.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 379–405.

Ko, Y., & Shy, H. (2008). Taiwanese undergraduates' performance constructing proofs and generating counterexamples in differentiation. *Proceedings of the*

Eleventh International Congress on Mathematics Education.

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principlesand standard for school mathematics*. Reston, VA: NationalCouncil of Teacher of Mathematics

Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal ofMathematical Behavior*, 13(1), 55–80.

Sears, R., Mueller-Hill, E., and Karadeniz, I. (2013). Pre-service Teachers Perception of their preparation Program to cultivate their Ability to Teach Proof. *Proceedings for the I Congreso* CEMACYC, RepúblicaDominicana.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., &Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(3), 145-166.

Stavrou, G. (2014). Common errors and misconceptions in mathematical proving by education undergraduates. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1, 1-8.

Zaslavsky, O., & Sullivan, P. (2011). *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics*. NY: Springer.

Zeybek, Z. (2017). Evaluating proofs and conjectures constructed by pre-service mathematics teachers. In E. Galindo & J. Newton, (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 797-804). Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.